

MPSI1 – Programme de colles

Semaine 05 – du 14 au 18 octobre 2024

Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

A - Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Généralités sur les fonctions

Ensemble de définition.

Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.

Parité, imparité, périodicité.

Somme, produit, composée.

Monotonie (large et stricte).

Fonctions majorées, minorées, bornées.

Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.
Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.

Traduction géométrique de ces propriétés.

La fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

b) Dérivation

Dérivée d'une fonction.

Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.

Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.

Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe.

Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.

Fonction de classe \mathcal{C}^1 .

Dérivées d'ordre supérieur.

Notations $f'(x)$, $\frac{d}{dx}(f(x))$.

Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; ils ne sont pas démontrés à ce stade.

Exemples simples de calculs de dérivées partielles.

Résultats admis à ce stade.

Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.

La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.

c) Fonctions usuelles

Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.

Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.

Inégalités $\exp(x) \geq 1+x$, $\ln(1+x) \leq x$.

Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan.

Fonctions hyperboliques sh, ch, th.

Dérivée, variations, représentation graphique.

Les fonctions puissances sont définies sur \mathbb{R}_+^* et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur \mathbb{R}_-^* .

Logarithme décimal, logarithme en base 2.

Dérivée, variations, représentation graphique.

Dérivée, variations, représentation graphique.

Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.

d) Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.

La dérivée est définie par les parties réelle et imaginaire.

Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.

Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.

Dérivée de $\exp(\varphi)$ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.

Programme de cette colle : cours et exercices sur les fonctions usuelles.

Exemples de questions de cours

1. Description de \mathbb{U}_n par extension et cardinal. Factorisation de $z^n - 1$. Écritures trigonométriques des racines n -ièmes de tout complexe w .
2. Pour tout complexe w donné sous-forme trigonométrique, écriture trigonométrique d'une racine carrée de w de partie réelle strictement positive, ou de partie réelle nulle et de partie imaginaire positive. Unicité d'une telle racine carrée.
3. Pour tout complexe w donné sous-forme algébrique, écritures algébriques des racines carrées de w .
4. Résolution dans \mathbb{C} d'une équation algébrique du second degré à coefficients complexes ; cas des coefficients réels et conjugaison des racines. Relations coefficients-racines.
5. Bijection réciproque de la composée de deux bijections. Image directe d'une partie par une fonction. Exemple de $\mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (2x + 1)/(x - 1)$.
6. Bornitude d'une fonction réelle (de la variable réelle) et majoration de sa fonction valeur absolue.
7. Transformation de l'expression algébrique d'une homographie et représentation graphique.
8. Limite en $+\infty$ de $x \mapsto \frac{e^x}{x}$; limites en $+\infty$ et $-\infty$ de $x \mapsto e^x x^\beta$; et limites en $+\infty$ et 0^+ de $x \mapsto x^\beta \ln(x)$, où β est un réel.
9. L'identité $\operatorname{ch}(a + b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$ pour tous réels a et b .
10. Définitions et dérivation des fonctions Arctan, Arcsin et Arccos.
11. Les égalités $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(1/x) = \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi}{2}$, et $\operatorname{Arcsin}(y) + \operatorname{Arccos}(y) = \frac{\pi}{2}$; pour tout x dans \mathbb{R}^* et pour tout y dans $[-1, 1]$.