NGAMBOU
Walter

DM 04

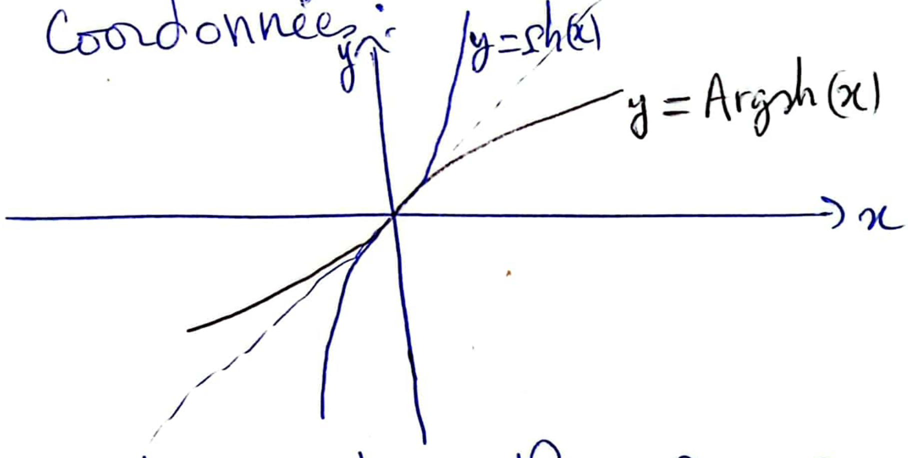
Exercice 1 :

$\boxed{1}$ On a :

- sh est continue de $]-\infty, +\infty[$ dans $]-\infty, +\infty[$.
- $\lim\limits_{-\infty} sh = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} sh = +\infty$.
- sh est strictement monotone.

Donc en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, le résultat suit.

$\boxed{2}$ Symétrie par rapport à la première bissectrice par échange des coordonnées :



$\boxed{3}$ Soit x dans $\mathbb{R}$. On a

- Argsh est continue (en x) ;
- $\forall t \in \mathbb{R}$, $sh'(t) \neq 0$ $(sh'(Argsh\, x) \neq 0)$.

Donc Argsh est dérivable en x, et

$$Argsh'(x) = \frac{1}{sh'(Argsh\, x)}$$

Or pour t dans $\mathbb{R}$,

1/10

$$sh'(t) = ch(t)$$
$$= \sqrt{ch^2(t)} \quad \text{car } ch(t) \geq 0$$
$$= \sqrt{1+sh^2(t)}$$

Donc $sh'(\text{Argsh}\, x) = \sqrt{1+x^2}$

D'où $\text{Argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\boxed{4}$ (1°) Je montre : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \leq sh(x)$.

Soit $\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto sh(x) - x$.

- $\alpha(0) = 0$ donc $\alpha(0) \geq 0$
- $\forall x \in]0, +\infty[,\ \alpha'(x) = ch(x) - 1$
$$= \frac{(e^{x} - e^{-x})^2}{2}$$
$$\geq 0$$
- α est continue sur $[0, +\infty[$.

Donc : $\forall x \in [0, +\infty[,\ \alpha(x) \geq \alpha(0) \geq 0$

D'où le résultat.

(2°) Je montre : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \text{Argsh}(x) \leq x$

Soit x ~~dans~~ dans $\mathbb{R}_+$.
Soit t dans $\mathbb{R}$ tel que $t = \text{Argsh}(x)$.
Alors $x = sh(t)$

sh est strictement croissante et $sh(t) \geq sh(0)$.

Donc $t \geq 0$.

Ainsi, d'après la section (1°)

$$t \leq sh(t)$$

i.e $\underline{\text{Argsh}(x) \leq x}$.

(3°) J'ai montré :

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\text{Argsh}(x) \leq x \leq sh(x)$

$\boxed{5}$ Soit x dans $\mathbb{R}$.

Soit t dans $\mathbb{R}$.

$$sh(t) = x \iff \frac{e^t - e^{-t}}{2} = x$$

$$\iff e^t - e^{-t} = 2x$$

$$\iff e^{2t} - 1 = 2xe^t$$

(car $e^t \neq 0$)

$$\iff (e^t)^2 - 2x(e^t) - 1 = 0$$

$$\iff (e^t - x)^2 - (1 + x^2) = 0$$

$$\iff e^t = x + \sqrt{x^2+1}$$

$$\text{ou } e^t = x - \sqrt{x^2+1}$$

Or $|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$

Donc $x - \sqrt{x^2+1} \leq |x| - \sqrt{x^2+1} < 0$

Et $x+\sqrt{x^2+1} \geq -|x|+\sqrt{x^2+1} > 0$

i.e

$$\underline{x-\sqrt{x^2+1} < 0 < x+\sqrt{x^2+1}}$$

Comme $\underline{e^t > 0}$

$$sh(t) = x \iff e^t = x+\sqrt{x^2+1}$$
$$\iff t = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

D'où,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{Argsh}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$\boxed{6}$ (1°) <u>Je montre que f_5 est bien définie.</u>

Soit x ~~dans~~ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$\sin(x) \in]-1;1[$;

donc $\operatorname{Argth}(\sin(x))$ est bien défini : $f_5(x)$ existe bien.

(2°) <u>Je montre que f_6 est bien définie.</u>

Soit x dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$$\frac{x}{2} \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[;$$

donc $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \in]\tan\left(\frac{-\pi}{4}\right), \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)[$

i.e $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \in]-1;1[$.

(car tan est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$)

Donc $f_6(x)$ existe bien.

$\boxed{7}$ Soit x dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

- $\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{1}{\cos(x)}$

$= \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$

Donc $\underline{f_3(x) = f_2(x)}$

- $\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1-\cos(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}$

$= \frac{1-\cos(2a)}{\sin(2a)}$

(où $a = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$)

$= \frac{2(\sin a)(\sin a)}{2(\sin a)(\cos a)}$

$= \tan(a)$

$= \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

Donc $\underline{f_2(x) = f_1(x)}$

D'où :

$\underline{\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)}$

8) Soit x dans $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

- $$f_3'(x) = \frac{1}{\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}} \times \left(\tan'(x) - \frac{\cos'(x)}{\cos^2(x)}\right)$$
$$= \frac{\cos(x)}{\sin(x)+1} \times \left(\frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\right)$$
$$= \boxed{\frac{1}{\cos(x)}}$$

- $$f_4'(x) = \text{Argsh}'(\tan x) \times \tan'(x)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} \times (1+\tan^2(x))$$
$$= \sqrt{1+\tan^2(x)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\cos^2(x)}}$$
$$= \boxed{\frac{1}{\cos(x)}} \quad \text{car } \cos(x) \geq 0$$

- $$f_5'(x) = \text{Argth}'(\sin x) \times \sin'(x)$$
$$= \frac{1}{1-\sin^2(x)} \times \cos(x)$$
$$= \frac{1}{\cos^2(x)} \times \cos(x)$$
$$= \boxed{\frac{1}{\cos(x)}}$$

• $f_6'(x) = 2\,\mathrm{Argth}'\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \times \tan'\left(\frac{x}{2}\right) \times \frac{1}{2}$

$$= \frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^{-1}$$

(où $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$)

$$= \frac{1}{\cos(x)}$$

• Ainsi,

$\underline{f_3'(x) = f_4'(x) = f_5'(x) = f_6'(x)}$;

ce pour tout x dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Donc <u>ces quatre fonctions diffèrent deux à deux d'une constante.</u>

Or $\underline{f_3(0) = f_4(0) = f_5(0) = f_6(0)}$.

D'où $f_3 = f_4 = f_5 = f_6$.

Puis, d'après 7,

$$\underline{f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = f_6}$$

Exercice 2.

$\boxed{1}$ Soit x dans $\mathbb{R}$.

Arcsin(x) et Arccos(x) sont définis si, et seulement si,

$$x \in [-1;1].$$

$$\text{Arccos}(x) = 0 \iff x = 1$$

Donc $\underline{I = [-1;1[}$

$\boxed{2}$ On a le tableau de valeurs

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
Arcsin(x)	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$+\frac{\pi}{6}$
Arccos(x)	$+\pi$	$+\frac{2\pi}{3}$	$+\frac{\pi}{2}$	$+\frac{\pi}{3}$
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$

$\boxed{3}$ Soit $x \in [-1;1]$.

$$x = \sin(\text{Arcsin}(x))$$
$$x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x)\right)$$

Or $\text{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

donc $\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x) \in [0, \pi]$.

Donc $\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x) = \text{Arccos}(x)$

8/10 Pour $\boxed{C = \frac{\pi}{2}}$, $\forall x \in [-1;1]$, $\text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = C$

$\boxed{4}$ Soit x dans I.

D'après 3.

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{Arccos}(x)} - 1$$

Or $\begin{array}{rcl} [-1;1[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \operatorname{Arccos}(x) \end{array}$

est strictement décroissante

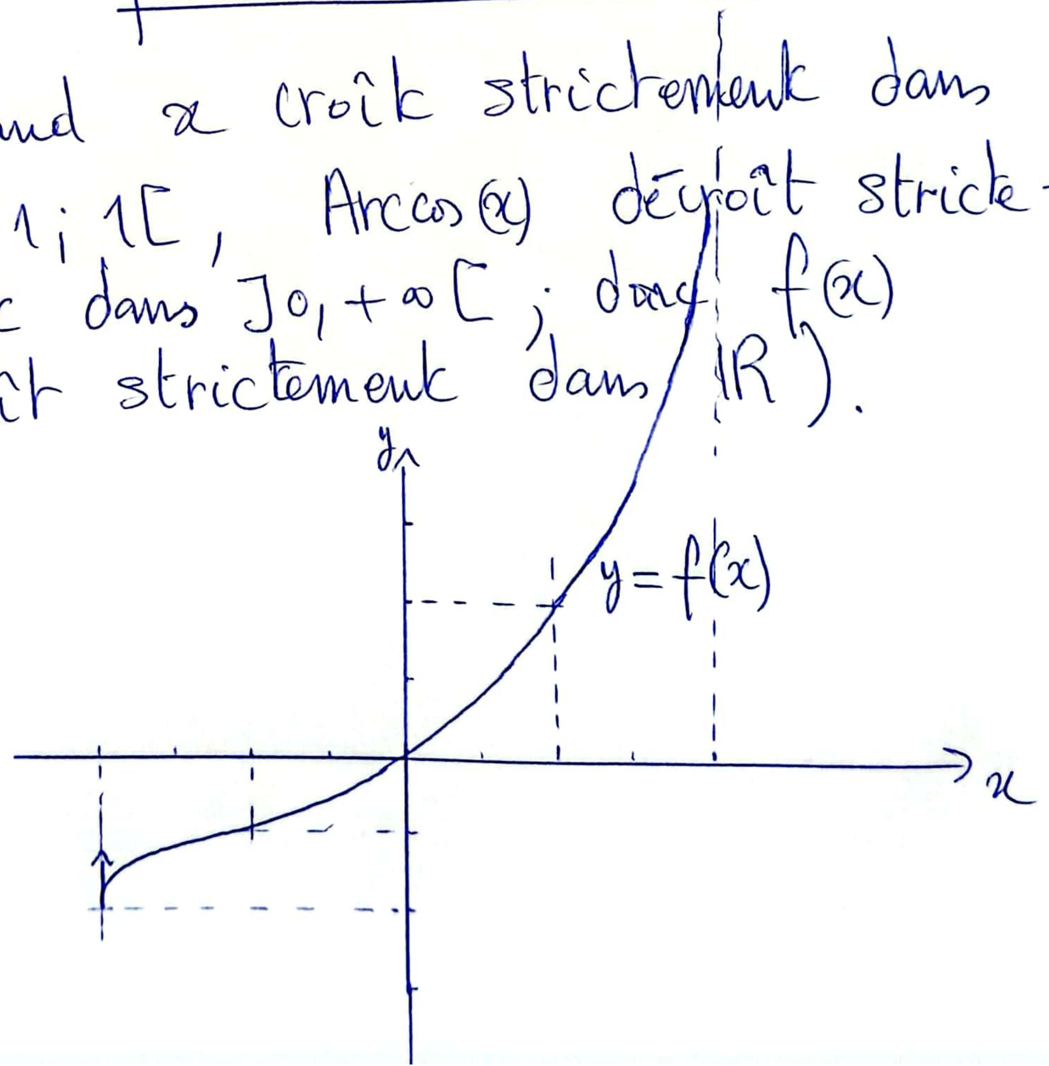
et $\begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{y} - 1 \end{array}$

est strictement décroissante car $\frac{\pi}{2} > 0$

Donc $\underline{f \text{ est strictement croissante.}}$

(Quand x croît strictement dans $[-1;1[$, $\operatorname{Arccos}(x)$ décroît strictement dans $]0,+\infty[$; donc $f(x)$ croît strictement dans $\mathbb{R}$).

$\boxed{5}$



9/10

$\boxed{6}$ Soit x dans $[-1;1[$.

$$f(x) = 2 \iff \frac{\pi/2}{\mathrm{Arccos}(x)} = 3$$

$$\iff \mathrm{Arccos}(x) = \frac{\pi}{6}$$

$$\iff x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

(car $\frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$)

$$\iff x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Réponse : $\boxed{\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}}$

10/10