

# Programme de colles de mathématiques

Semaine du lundi 04 novembre 2024

Lycée Pasteur, MPSI1

Walter Ngambou

## Thèmes

- *Fonctions usuelles* : études et représentations graphiques des fonctions usuelles (dérivabilité incluse, convexité exclue) ; croissance comparée.
- *Fonctions générales* : égalité de deux fonctions ; restriction et prolongement ; image directe et image réciproque ; bijectivité, surjectivité et injectivité, lien avec la composition ; cas des ensembles finis. *Pas de fonctions indicatrices des parties d'un ensemble.*

## Exemples de questions de cours

1. Transformation de l'expression algébrique d'une homographie réelle et représentation graphique.
2. Limite en  $+\infty$  de  $x \mapsto \frac{e^x}{x}$  ; limites en  $+\infty$  et  $-\infty$  de  $x \mapsto e^x|x|^\beta$  ; et limites en  $+\infty$  et  $0^+$  de  $x \mapsto x^\beta \ln(x)$ , où  $\beta$  est un réel.
3. Études et représentations graphiques des fonctions Arctan, Arcsin et Arccos.
4. Les égalités  $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(1/x) = \text{sgn}(x)\frac{\pi}{2}$ , et  $\text{Arcsin}(y) + \text{Arccos}(y) = \frac{\pi}{2}$  ; pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^*$  et pour tout  $y$  dans  $[-1, 1]$ .
5. Expression d'un argument de  $a + ib$  à l'aide de Arctan, pour  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}$ .
6. Soit  $f : E \rightarrow F$ . Il y a équivalence entre "La fonction  $f$  est inversible." ; "La fonction  $f$  est à la fois surjective et injective." ; et "La fonction  $f$  est bijective."
7. Exemple d'étude, pour des réels  $a, b, c$  et  $d$  donnés, de la bijectivité, la surjectivité, et l'injectivité de la fonction  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$ .
8. Exemple d'étude, pour des complexes  $a, b, c$  et  $d$  donnés tels que  $c(ad - bc) \neq 0$ . de la bonne définition et de la bijectivité de la fonction  $\mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}, z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ .
9. Soit  $f : E \rightarrow F$ , avec  $E$  et  $F$  finis. Il y a équivalence entre : "La fonction  $f$  est bijective" ; "La fonction  $f$  est surjective et  $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$ " ; et "La fonction  $f$  est injective et  $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$ ".
10. Changement d'indice dans une somme et calcul de  $\sum_{\xi \in U_n} \xi^p$  pour tous  $n, p \in \mathbb{Z}$  tels que  $n \geq 1$  et  $|p| < n$ .