DM 05

1. Pour tout x dans $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$\sin^0(x) = 1$$
$$\sin^1(x) = \frac{d}{dx}(-\cos x)$$
$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$
$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right)$$

Donc

$$\boxed{\begin{aligned} W_0 &= \frac{\pi}{2} \\ W_1 &= 1 \\ W_2 &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}}$$

2. Soit n dans $\mathbb{N}$.

$$W_n = \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-0} \sin^n(x)\,dx$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-u\right) \times (-1)\,du$$
$$= \int_0^{\pi/2} \cos^n(u)\,du$$

3. Soit n dans $\mathbb{N}$.

Soit x dans $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Alors $\underline{\sin(x) \in [0,1]}$.

Donc $\sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x)$.

D'où $W_{n+1} \leq W_n$

par $\underline{\text{croissance de l'intégrale}}$.

D'où la décroissance de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Soit n dans $\mathbb{N}$.

Soit x dans $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\underline{\sin^{n+2}(x) = \sin(x) \sin^{n+1}(x)}$$

Or $\sin(x) = \frac{d}{dx}(-\cos(x))$

Et $\frac{d}{dx}(\sin^{n+1}(x)) = (n+1) \sin^n(x) \cdot \cos(x)$

Donc, en intégrant par parties, on trouve

$$W_{n+2} = \left[-\cos(x)\sin^{n+1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\cos^2(x)\,dx$$

$$= (n+1) W_n - (n+1) W_{n+2}$$

(car $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $(\sin(0))^{n+1} = 0$;
et $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$)

D'où $(n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n$

Puis $\boxed{W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n}$

5. Soit p dans $\mathbb{N}$.

Par récurrence sur p, je montre

$$\mathcal{A}(p) : \begin{cases} W_{2p} = \frac{\pi}{2} \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \\ W_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$$

(I) D'après 1.

$$W_{2\times 0} = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \frac{(2\times 0)!}{2^{2\times 0} (0!)^2}$$

et $W_{2\times 0+1} = 1 = \frac{2^{2\times 0} (0!)^2}{(2\times 0+1)!}$

Donc $\mathcal{A}(0)$.

(H) Je suppose $\mathcal{A}(p)$. Je montre $\mathcal{A}(p+1)$.

On a : $2\times(p+1) = 2p + 2$;

$2\times(p+1)+1 = (2p+1)+2$.

Donc, d'après 4.

$W_{2(p+1)} = \frac{2p+1}{2p+2} W_{2p}$; $W_{2(p+1)+1} = \frac{2(p+1)}{2(p+1)+1} W_{2p+1}$

Or $\dfrac{2p+1}{2p+2} = \dfrac{(2p+2)(2p+1)}{(2p+2)(2p+2)}$

$$= \frac{(2p+2)(2p+1)}{2^2(p+1)^2}$$

et $\dfrac{2(p+1)}{2(p+1)+1} = \dfrac{2^2(p+1)^2}{(2(p+1)+1)(2(p+1))}$.

Comme $A(p)$,

$$W_{2(p+1)} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}((p+1)!)^2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{(2(p+1))!}{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}$$

et $W_{2(p+1)+1} = \dfrac{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}{(2(p+1)+1)!}$

(car $(2(p+1)+1)(2(p+1)) = (2p+3)(2p+2)$)

i.e. $\underline{A(p+1)}$

(c) En conclusion, en vertu du principe de récurrence, $A(p)$. Ce quel que soit p dans $\mathbb{N}$

6. (a) Soit n dans $\mathbb{N}^{\cancel{*}}$.

- Je suppose $n=0$. Alors
$$W_n W_{n+1} = W_0 W_1 = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

- Je suppose $n>0$ tel que
$$W_{n-1} W_n = \frac{\pi}{2n}.$$

Alors
$$W_n W_{n+1} = W_n \cdot \frac{n}{n+1} W_{n-1}$$
$$= \frac{\pi}{2n} \times \frac{n}{n+1}$$
$$= \frac{\pi}{2(n+1)}$$

- Je conclus, d'après le principe de récurrence, que
$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

(Autre voie : $(n+2) W_{n+2} W_{n+1} = (n+1) W_{n+1} W_n$.
Donc la suite $\big((n+1) W_{n+1} W_n\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante de terme initial $\frac{\pi}{2}$.)

(b) Comme au 3. on montre que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.
Or elle est décroissante d'après 3.
Donc elle converge.

Je pose $W_\infty = \lim_{n \to \infty} W_n$.

Soit n dans $\mathbb{N}$.

D'après 6.(a),

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Donc, par passage à la limite quand n tend vers l'infini, on a

$$W_\infty W_\infty = 0$$

D'où

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} W_n = 0}$$

(c) Soit n dans $\mathbb{N}$.

D'après 3.

$$W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n.$$

Donc, d'après 4.

$$\frac{n+1}{n+2} W_n \leq W_{n+1} \leq W_n$$

Or $W_n \neq 0$ d'après 6.(a) ;

donc $\underline{W_n > 0}$ d'après 6.(b).

Donc $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$

i.e. $\boxed{1 - \frac{1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1}$

(d) $\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1}$ par encadrement

Appendice

Retour sur 5 (formules ignorées)

Soit p dans $\mathbb{N}$.

- $$\begin{cases} W_0 \times 1 = W_{2\times 0} \\ W_{2\times 0} \times \dfrac{2\times 1 - 1}{2\times 1} = W_{2\times 1} \\ \vdots \\ W_{2\times(p-1)} \times \dfrac{2p-1}{2p} = W_{2p} \end{cases}$$

Donc $\quad W_0 \times C_{global} = W_{2p}$

où $\quad C_{global} = \prod_{1\leq k\leq p} \frac{2k-1}{2k}$

$$= \frac{1\times 3\times \cdots \times (2p-1)}{2\times 4\times \cdots \times (2p)}$$

$$= \frac{1\times 2\times 3\times 4\times \cdots \times (2p-1)\times (2p)}{2\times 2\times 4\times 4\times \cdots \times (2p)\times (2p)}$$

$$= \frac{(2p)!}{(2^p\, p!)^2}$$

D'où $\quad \boxed{W_{2p} = \frac{\pi}{2}\,\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}}$

$$\bullet \begin{cases} W_1 \times 1 = W_{2\times 0+1} \\ W_{2\times 0+1} \times \dfrac{2\times 1}{2\times 1+1} = W_{2\times 1+1} \\ \quad \vdots \\ W_{2(p-1)+1} \times \dfrac{2p}{2p+1} = W_{2p+1} \end{cases}$$

Donc $\quad W_1 \times C_{global} = W_{2p+1}$

où $\quad C_{global} = \prod_{1 \leq k \leq p} \dfrac{2k}{2k+1}$

D'où $\quad \boxed{W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}}$ Comme ci-haut

Retour sur 6.(b)

Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

On a $\quad W_n W_{n-1} \geq W_n W_n$

(Car $\quad W_{n-1} \geq W_n$ et $W_n \geq 0$)

Or $\quad W_n W_{n-1} = \dfrac{\pi}{2n}$

Donc $\quad 0 \leq W_n^2 \leq \dfrac{\pi}{2n}$

Donc $\quad 0 \leq |W_n| \leq \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

D'où $\quad \lim_{n \to +\infty} W_n = 0$

(par encadrement)