TD 6

Exer. 1. Déterminer une primitive de
$$x \longmapsto \frac{1}{\cos(x)}$$

Corr. 1. (1) Soit x dans $\mathbb{R}$.
L'expression $\frac{1}{\cos(x)}$ est définie si, et seulement si,
$$\cos(x) \neq 0.$$
Or $\cos(x) = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{2} \; [\pi]$

Ainsi, je pose
$$D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$$
et
$$f : \begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{\cos(x)} \end{array}$$

(2) Soit x dans D.
($f(\pi - x) = -f(x)$) ; donc je cherche une fonction g telle que
$$f(x) = g(\sin(x)) \cos(x) \quad \left(= g(\sin(x)) \sin'(x) \right)$$

Soit $g : \left]-1, +1\right[\longrightarrow \mathbb{R}$
$$y \longmapsto \frac{1}{1-y^2}$$

Alors
$$f(x) = g(\sin x)\sin'(x)$$
Or pour tout y dans $]-1,+1[$
$$g(y) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+y} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-y}$$
$$= \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right)$$
Donc $$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)\right)$$

Réponse : Une primitive de
$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{\cos x}$$

est définie par
$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$$

Remarque : On obtient toute autre primitive en ajoutant des constantes éventuellement inégales sur chacun des intervalles $]k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}[$, pour k parcourant $\mathbb{Z}$.

Exer. 2. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a<b$; $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue de classe $\mathcal{C}^1$; et ω dans $\mathbb{R}^*$.

Montrer que

$$\int_a^b f(t)\sin(n\omega t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Corr. 2. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

J'intègre par parties en dérivant f :

$$\int_a^b f(t)\sin(n\omega t)\,dt = A_n - B_n .$$

où $A_n = \left[f(t)\,\frac{-\cos(n\omega t)}{n\omega} \right]_a^b$

et $B_n = \int_a^b f'(t)\,\frac{-\cos(n\omega t)}{n\omega}\,dt$

Je pose

$$M = \frac{3}{|\omega|}\max\left(|f(a)|, |f(b)|, \int_a^b |f'(t)|\,dt \right)$$

Alors

- M est indépendant de n
- $0 \leq \left| \int_a^b f(t)\sin(n\omega t)\,dt \right| \leq \frac{M}{n}$

D'où le résultat

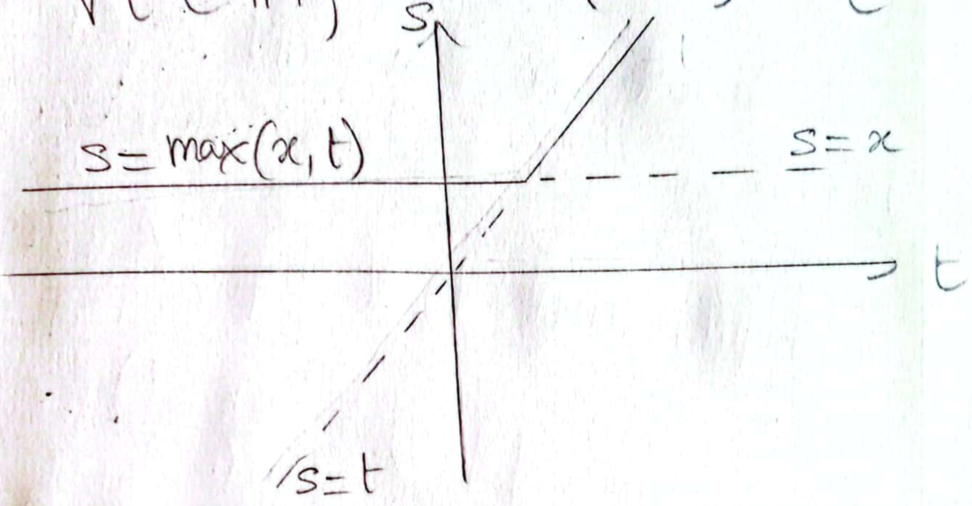
Exer.3. Représenter la fonction

$$x \longmapsto \int_0^1 \max(x,t)\,dt$$

Corr.3. Soit x dans $\mathbb{R}$.

(1) On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \max(x,t) = \begin{cases} x & \text{si } t \leq x \\ t & \text{si } t > x \end{cases}$$



Ainsi, la fonction

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \max(x,t) \end{array}$$

est continue ; donc on peut poser

$$f(x) = \int_0^1 \max(x,t)\,dt$$

(2) Je ré-exprime $f(x)$.

Cas 1 : $x \leq 0$.

Alors $\quad \forall t \in [0,1], \quad \max(x,t) = t$

Donc $\quad f(x) = \frac{1}{2}$

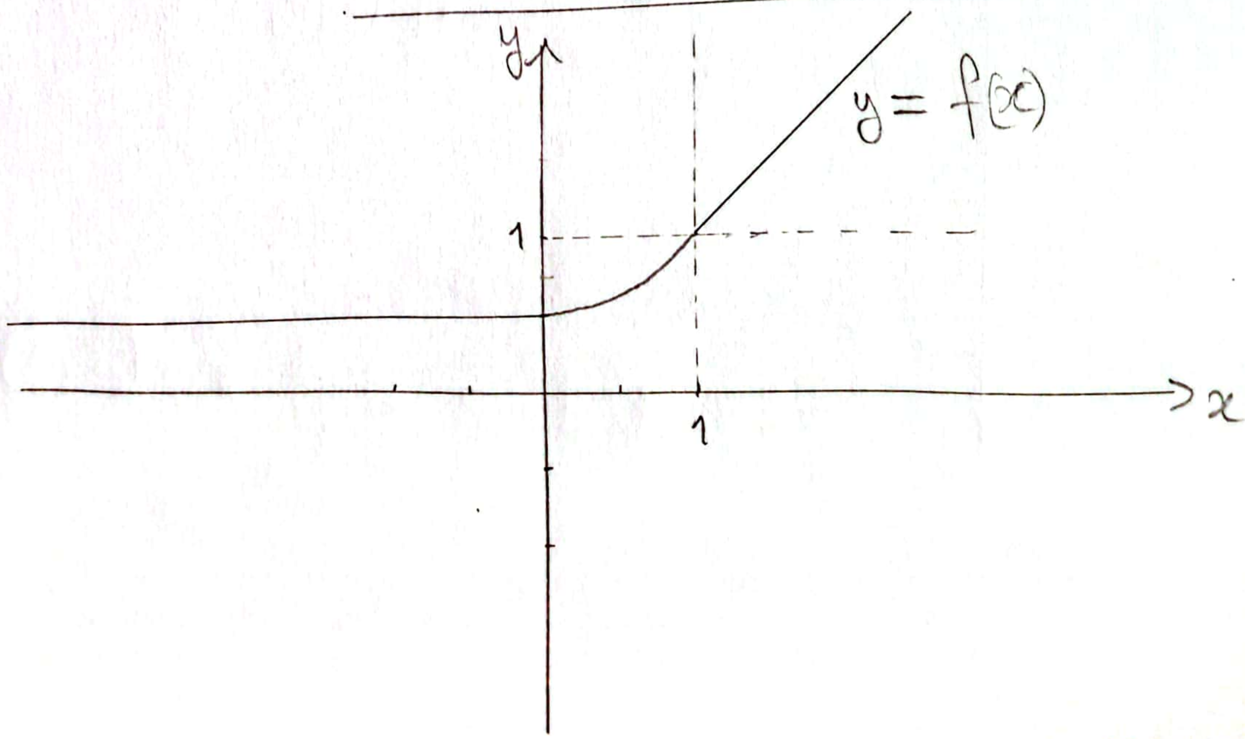
Cas 2 : $0 < x < 1$.

Alors
$$f(x) = \int_0^x x\,dt + \int_x^1 t\,dt$$
$$= x^2 + \frac{1-x^2}{2}$$
$$= \frac{1+x^2}{2}$$

Cas 3 : $1 \leq x$.

Alors
$$f(x) = \int_0^1 x\,dt$$
$$= x$$

Bilan :
$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \frac{1+x^2}{2} & \text{si } x \in [0, 1[\\ x & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}}$$



Exer. 4. Démontrer que la fonction

$$x \longmapsto \int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\,dt$$

est dérivable et exprimer sa dérivée

Cor. 4. (1) Soit (x,t) dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tel que $t+x \neq 0$.

Je pose $\varphi(x,t) = \dfrac{e^t}{t+x}$.

Alors $\varphi(x,t) = e^{-x}\left(\dfrac{e^u}{u}\right)_{u=t+x}$.

Or $\{t+x : t\in[0,1]\} = [x, x+1]$.

Et $0 \in [x,x+1] \iff x \in [-1,0]$

Ainsi, la fonction

$$f :]-\infty,-1[\,\cup\,]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\,dt$$

est bien définie.

(2) Soit x dans $\mathbb{R}\setminus[0,1]$,

$$f(x) = e^{-x}\int_x^{x+1} \frac{e^u}{u}\,du$$

Or $[x, x+1] \subset \mathbb{R}^*$, donc

f est dérivable en x et

$$f'(x) = e^{-x} \times (-1) \int_x^{x+1} \frac{e^u}{u}\,du$$

$$+ e^{-x} \cdot \left(\frac{e^{x+1}}{x+1} - \frac{e^x}{x} \right)$$

$$= -f(x) + \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x}$$

$$= -\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\,dt + \left[\frac{e^t}{t+x} \right]_{t=0}^1$$

<u>Bonus</u> Or pour t dans $[0,1]$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{e^t}{t+x} \right) = e^t \frac{1}{t+x} - e^t \frac{1}{(t+x)^2}$$

Donc $$\left[\frac{e^t}{t+x} \right]_{t=0}^1 = f(x) - \int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}\,dt.$$

D'où $\forall x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\,dt \right) = -\int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)^2}\,dt$$

(On a trouvé : $\frac{d}{dx}\left(\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\,dt \right) = \int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{e^t}{t+x} \right) dt$

noté $\frac{\partial}{\partial x}$ ultérieurement

MP/MP* : "dérivabilité sous le signe somme".)

Exer.5. En s'aidant d'une figure, justifier que la suite

$$\left(\int_0^{4\pi n} \frac{\sin(t)}{t}\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

est croissante.

Corr.5. Soit n dans $\mathbb{N}$.

(1) Je vérifie la définition.

La fonction

$$\begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t\neq 0 \\ 1 & \text{si } t=0 \end{cases} \end{array}$$

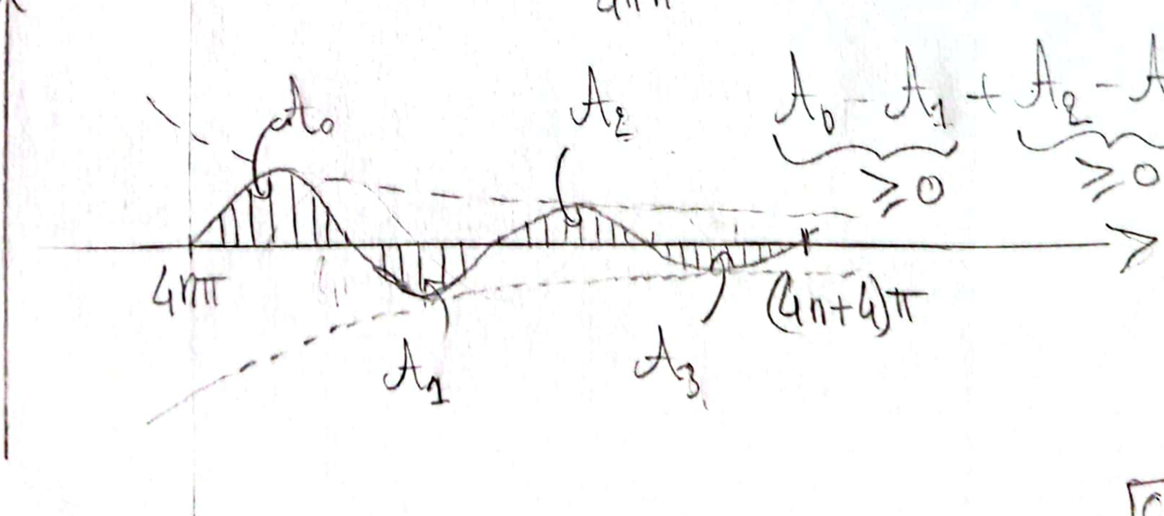
est continue, donc peut poser

$$u_n = \int_0^{4\pi n} \frac{\sin(t)}{t}\,dt.$$

(2) Je vise à affirmer : $u_{n+1} \geqslant u_n$.

On a, d'après la relation de Chasles,

$$u_{n+1} - u_n = \int_{4\pi n}^{4\pi(n+1)} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$$



$$\underbrace{A_0 - A_1}_{\geqslant 0} + \underbrace{A_2 - A_3}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

En effet,

$$u_{n+1} - u_n = A_0 - A_1 + A_2 - A_3 .$$

Où pour $k \in [\![0, 3]\!]$,

$$A_k = (-1)^k \int_{\pi(4n+k)}^{\pi(4n+k+1)} \frac{\sin(t)}{t} dt .$$

Or pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\int_{\pi m}^{\pi(m+1)} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_{\pi m + 0}^{\pi m + \pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin(\pi m + t')}{\pi m + t'} dt'$$

$$= (-1)^m \int_0^{\pi} \frac{\sin(t')}{\pi m + t'} dt' .$$

D'où,

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\pi} \sin(t') \, \alpha_n(t') \, dt'$$

où, pour tout $t' \in]0, \pi]$

$$\alpha_n(t') = \underbrace{\frac{1}{\pi 4n + t'} - \frac{1}{\pi(4n+1) + t'}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{\pi(4n+2) + t'} - \frac{1}{\pi(4n+3) + t'}}_{\geq 0}$$

et $\sin(t') \geq 0$.

Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

But atteint !