

Programme de colles de mathématiques

Semaine du lundi 11 novembre 2024

Lycée Pasteur, MPSI1

Walter Ngambou

Thèmes

- *Fonctions générales.* (1) Égalité de deux fonctions. (2) Restriction et prolongement. (3) Image directe et image réciproque. (4) Inversibilité, surjectivité, injectivité et bijectivité, liens avec la composition. (5) Cas des ensembles de départ et d'arrivée finis. (6) Fonctions indicatrices des parties d'un ensemble.
- *Intégration d'une fonction continue sur un segment.* (1) Définition par les primitives dont on admet ici l'existence en général (fonction complexe d'une variable réelle), et interprétation par les aires algébriques (fonction réelle d'une variable réelle). (2) Propriétés des opérations sur les fonctions dérivées : combinaisons linéaires, produit, quotient, composée et réciproque. (3) Propriétés de la somme intégrale : relation de Chasles ; linéarité, partie réelle et partie imaginaire ; positivité et croissance (fonction réelle) ; inégalité triangulaire étendue (somme intégrale et valeur absolue/module). (4) Intégration par parties comme pseudo-inversion de la dérivation d'un produit. (5) Intégration par changement de variable comme pseudo-inversion de la dérivation d'une composée. (6) Fonction fixe et bornes variables : dérivation. (6) Table de primitives comprenant des primitives de $x \mapsto \tan x$, $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \frac{1}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, sur tout intervalle de leurs domaines respectifs de dérivabilité.

Exemples de questions de cours

1. Soit $f : E \rightarrow F$. Il y a équivalence entre "La fonction f est inversible." ; "La fonction f est à la fois surjective et injective." ; et "La fonction f est bijective."
2. Soit $f : E \rightarrow F$, avec E et F finis. Il y a équivalence entre : "La fonction f est bijective" ; "La fonction f est surjective et $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$ " ; et "La fonction f est injective et $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$ ".
3. Calculs de sommes discrètes par changement d'indice *en justifiant*.
4. Soit f une fonction de $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{C})$ (valeurs complexes). Ainsi, $\left| \int_{[a, b]} f \right| \leq \int_{[a, b]} |f|$.
5. Les primitives de $x \mapsto \frac{x - \alpha}{((x - \alpha)^2 + \beta^2)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ($n = 1$ ou $n \in \llbracket 2, n \rrbracket$).
6. Relation de récurrence entre les fonctions $F_n : x \mapsto \int_{\alpha}^x \frac{1}{((t - \alpha)^2 + \beta^2)^n} dt$ pour $n \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Application : les primitives de $x \mapsto \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2}$.
7. Les primitives de $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ sur tout intervalle de son domaine de dérivabilité.
8. Définition et représentation graphique de $x \mapsto \int_0^1 \max(x, t) dt$.