W.Ngambou
Mathématiques
MPSI

DS03

Exercice 1.

Soit (a',b',c') dans $\mathbb{C}^3$. Je cherche tout (a,b,c) dans $\mathbb{C}^3$ tel que

$$f(a,b,c) = (a',b',c').$$

Soit (a,b,c) dans $\mathbb{C}^3$.

$$f(a,b,c) = (a',b',c')$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a+b+c = a' & (L_1) \\ a+ib+jc = b' & (L_2) \\ a+i^2b+j^2c = c' & (L_3) \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a+b+c = a' \\ a+ib+jc = b' \\ i(i-1)b+j(j-1)c = -b'+c' \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a+b+c = a' \\ (i-1)b+(j-1)c = -a'+b' \\ i(i-1)b+j(j-1)c = -b'+c' \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - iL_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a+b+c = a' \\ (i-1)b+(j-1)c = -a'+b' \\ (j-i)(j-1)c = ia'-(i+1)b'+c' \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 \times \frac{1}{i-1} \\ L_3 \leftarrow L_3 \times \frac{1}{(j-i)(j-1)}}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a+b+c = a' \\ b+\frac{j-1}{i-1}c = \frac{-1}{i-1}a'+\frac{1}{i-1}b' \\ c = \frac{i}{(j-i)(j-1)}a' - \frac{i+1}{(j-i)(j-1)}b' + \frac{1}{(j-i)(j-1)}c' \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{j-1}{i-1} L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a+b+c = a' \\ b = \frac{-j}{(i-1)(j-i)} a' + \frac{j+1}{(i-1)(j-i)} b' - \frac{1}{(i-1)(j-i)} c' \\ c = \frac{i}{(j-1)(j-i)} a' - \frac{i+1}{(j-1)(j-i)} b' + \frac{1}{(j-1)(j-i)} c' \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a+b+c = a' \\ b = \frac{-j(j-1)}{p} a' + \frac{j^2-1}{p} b' - \frac{j-1}{p} c' \\ c = \frac{i(i-1)}{p} a' - \frac{i^2-1}{p} b' + \frac{i-1}{p} c' \end{cases}$$

(où $p = (i-1)(j-1)(j-i)$)

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a = \frac{ij(j-i)}{p} a' - \frac{(j+i)(j-i)}{p} b' + \frac{j-i}{p} c' \\ b = \frac{-j(j-1)}{p} a' + \frac{(j+1)(j-1)}{p} b' - \frac{j-1}{p} c' \\ c = \frac{i(i-1)}{p} a' - \frac{(i+1)(i-1)}{p} b' + \frac{i-1}{p} c' \end{cases}$$

Ainsi, f est bijective et

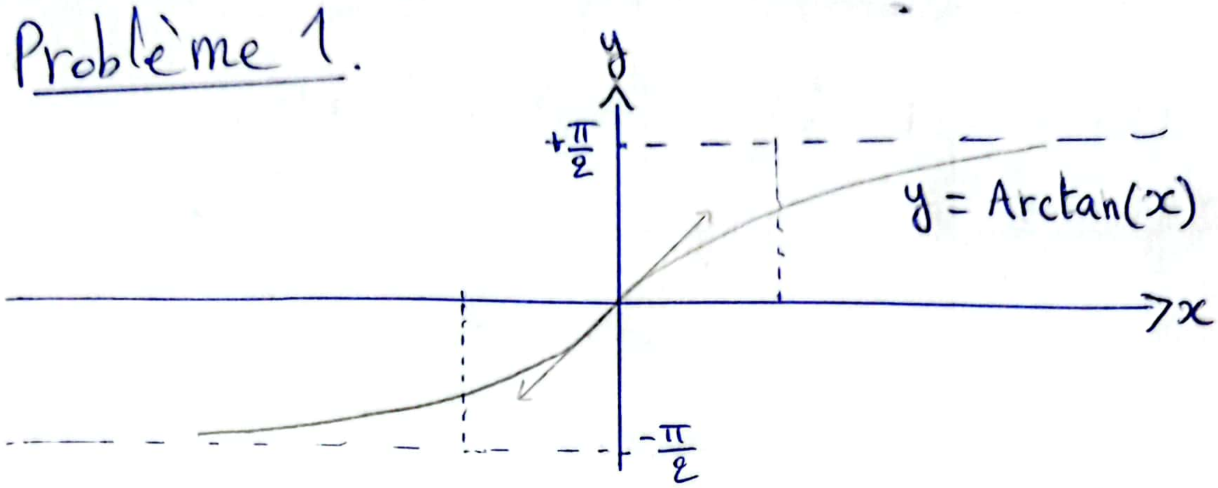
$\forall (a', b', c') \in \mathbb{C}^3$,

$$f^{-1}(a', b', c') = \left(\frac{ij(j-i)}{p} a' - \frac{(j+i)(j-i)}{p} b' + \frac{j-i}{p} c' ; \; -\frac{j(j-1)}{p} a' + \frac{(j+1)(j-1)}{p} b' - \frac{j-1}{p} c' ; \; \frac{i(i-1)}{p} a' - \frac{(i+1)(i-1)}{p} b' + \frac{i-1}{p} c' \right)$$

où $p = (i-1)(j-1)(j-i)$

Problème 1.

1.



2. Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \text{Arctan}(t) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)$.

Soit $t \in \mathbb{R}^*$. On a

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2} \times \frac{-1}{t^2} = 0.$$

Donc f est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Or $f(1) = \frac{\pi}{2}$ et $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$

D'où
$$\boxed{\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

(Autre manière : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $(1+ix)(1+i\frac{1}{x}) = i(x + \frac{1}{x})$)
...

3.a. On a :

$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) = \frac{\pi}{2}$

$\Longleftrightarrow \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$

(d'après 2. car $x > 0$)

$\Longleftrightarrow \text{Arctan}(y) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Longleftrightarrow y = \frac{1}{x}$

(car Arctan est strictement monotone, donc

$\iff \quad xy = 1$

D'où l'équivalence.

3.b. Par imparité de Arctan et d'après 3.a.

$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(y) = -\frac{\pi}{2}$

$\iff \quad (-x)(-y) = 1 \quad$ (car $-x, -y \in \mathbb{R}_+^*$)

D'où l'équivalence.

3.c. Je suppose x et y de signes différents.

Plusieurs cas.

Cas 1 : $x < 0 < y$.

Comme Arctan est croissante

$$\operatorname{Arctan}(x) \leq \operatorname{Arctan}(0) \leq \operatorname{Arctan}(y)$$

Alors

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctan}(x) \leq \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(y)$$

et $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(y) \leq \operatorname{Arctan}(y) < +\frac{\pi}{2}$

Donc $\quad \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(y) \neq \pm\frac{\pi}{2}$

Cas 2 : $y < 0 < x$

De même par symétrie.

Bilan : En tout cas, non,

$$\boxed{\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(y) \neq \pm\frac{\pi}{2}}$$

4. Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé.

Je pose
$$I_y = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } y = 0 \\ ]-\infty, \frac{1}{y}[& \text{si } y > 0 \\ ]\frac{1}{y}, +\infty[& \text{si } y < 0 \end{cases};$$

en sorte que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xy < 1 \iff x \in I_y.$$

Soit
$$f : I_y \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) - \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

Soit $x \in I_y$. On a
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \times \frac{1.(1-xy) - (x+y).(-y)}{(1-xy)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{(x+y)^2 + (1-xy)^2}$$

Or
$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(1-xy)^2 = 1 - 2xy + x^2y^2$$

Donc $(x+y)^2 + (1-xy)^2 = (1+x^2)(1+y^2)$.

C'est que $\boxed{f'(x) = 0}$

La fonction f est donc constante sur l'intervalle I_y.

Or $0 \in I_y$ et $f(0) = 0$

D'où $\boxed{\forall x \in I_y, \quad f(x) = 0}$

D'où le résultat.

(Autre manière : $\forall x, y \in \mathbb{R}$
$$(1+ix)(1+iy) = (1-xy) + i(x+y))$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après 4.

$$\text{Arctan}\left(\frac{(p+1)-p}{1+(p+1)p}\right) = \text{Arctan}(p+1) + \text{Arctan}(-p)$$
$$= \text{Arctan}(p+1) - \text{Arctan}(p)$$

(Car $(p+1)(-p) \leq 0 < 1$).

Ainsi, $$\sum_{p=0}^{n} \text{Arctan}\left(\frac{1}{1+p+p^2}\right) = \text{Arctan}(n+1)$$

D'où $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sum_{p=0}^{n} \text{Arctan}\left(\frac{1}{1+p+p^2}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

6. On a $0 \times 0 < 1$; donc
$$f(0) + f(0) = f\left(\frac{0+0}{1-0\times 0}\right)$$

i.e. $$2f(0) = f(0)$$
$$\boxed{f(0) = 0}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a $x(-x) = -x^2 \leq 0 < 1$;

donc $$f(x) + f(-x) = f\left(\frac{x - x}{1 - x(-x)}\right)$$

i.e. $$f(x) + f(-x) = f(0)$$

Or $f(0) = 0$; donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = -f(x)}$$

(f est impaire).

7. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xy < 1$.

Les nombres dérivés de $I_y \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t) + f(y)$ et $I_y \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f\left(\frac{t+y}{1-ty}\right)$ en x (notation de 4.) sont respectivement

$$f'(x) \quad \text{et} \quad f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \times \frac{1+y^2}{(1-xy)^2}$$

D'où l'égalité d'après la relation (R).

8. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $0 \times t = 0 < 1$;

donc d'après 7.

$$f'(0) = \frac{1+t^2}{(1-0\times t)^2} f'\left(\frac{0+t}{1-0\times t}\right)$$

D'où le résultat.

Ainsi, la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t) - f'(0)\,\mathrm{Arctan}(t)$ est dérivable de dérivée nulle ; valant 0 en 0, elle est constante égale à 0 sur <u>l'intervalle $\mathbb{R}$</u> :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = f'(0)\,\mathrm{Arctan}(t).$$

$$\boxed{\text{On a trouvé } \alpha = f'(0) \text{ tel que } f = \alpha\,\mathrm{Arctan}.}$$

~~Prob~~

Problème 2.

1. Soient f et g dans E^E.

Par définition, $\underline{D_f(g) = g \circ f}$

et $\underline{G_g(f) = g \circ f}$.

D'où $$D_f(g) = G_g(f).$$

2. ~~(1°)~~ Soit $n \in \mathbb{N}$.

(1°) On a : $g \circ f(n) = g(2n) = \frac{2n}{2} = n$

Donc $$\boxed{D_f(g) = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}}$$

(2°) On a : $f \circ g(n) = \begin{cases} f(0) & \text{si } n \text{ impair} \\ f\left(\frac{n}{2}\right) & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$

D'où $$\boxed{D_g(f) = \mathrm{id}_{\mathbb{N}} \mathbb{1}_{2\mathbb{N}}}$$

(3°) On a : $h \circ f(n) = h(2n) = \left\lfloor \frac{2n}{2} \right\rfloor = n$

Donc $$\boxed{G_h(f) = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}}$$

(4°) On a : $f \circ h(n) = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) = 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

Donc $$\boxed{G_f(h) = \mathrm{id}_{\mathbb{N}} - \mathbb{1}_{(2\mathbb{N}+1)}}$$

3. Soit $\varphi \in E^E$.

(1°) On a : $D_f \circ D_g(\varphi) = D_f(\varphi \circ g) = (\varphi \circ g) \circ f$

Donc, par <u>associativité</u>,

$$\boxed{D_f \circ D_g = D_{g \circ f}}$$

(2°) On a : $G_f \circ G_g(\varphi) = G_f(g \circ \varphi) = f \circ (g \circ \varphi)$.

Donc, $\boxed{G_f \circ G_g = G_{f \circ g}}$

(3°) On a :

- $D_f \circ G_g(\varphi) = D_f(g \circ \varphi) = (g \circ \varphi) \circ f$
- $G_g \circ D_f(\varphi) = G_g(\varphi \circ f) = g \circ (\varphi \circ f)$
- Donc, $\boxed{D_f \circ G_g = G_g \circ D_f}$

4. * Je suppose que f est injective.

Je montre que G_f est injective.

Soient φ_0 et φ_1 dans E^E. <u>Je suppose</u>

$$\underline{G_f(\varphi_0) = G_f(\varphi_1)}$$

i.e. $f \circ \varphi_0 = f \circ \varphi_1$.

Alors, pour tout $x \in E$,

$$f(\varphi_0(x)) = f(\varphi_1(x)) \, ;$$

Donc $\varphi_0(x) = \varphi_1(x)$ car f est injective. D'où

$$\underline{\varphi_0 = \varphi_1}.$$

C'est fait !

* Je suppose que G_f est injective. Je montre que f est injective.
Soient x_0 et x_1 dans E. Je suppose

$$\underline{f(x_0) = f(x_1)}$$

Soient $\varphi_0 : E \to E, x \mapsto x_0$
et $\varphi_1 : E \to E, x \mapsto x_1$.

Alors $f \circ \varphi_0 = f \circ \varphi_1$

i.e. $G_f(\varphi_0) = G_f(\varphi_1)$

Or G_f est injective, donc

$$\varphi_0 = \varphi_1.$$

Par suite $\underline{x_0 = \varphi_0(x_0) = \varphi_1(x_0) = x_1}$

c'est fait.

* D'où le résultat.

5. Je suppose que f est injective.
Je définis $\varphi : E \to E$ telle que

$$\forall x \in E, \quad \varphi(f(x)) = x$$

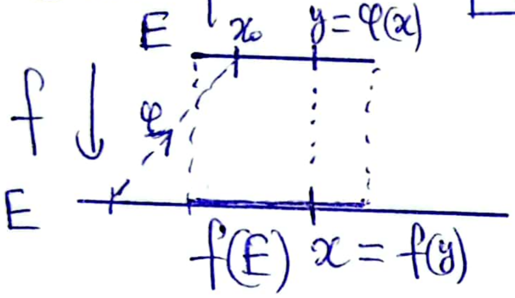
Soit $x_0 \in E$ fixé.

Soit
$$\boxed{\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \begin{cases} y \in E \,/\, f(y) = x & \text{si } x \in f(E) \\ x_0 & \text{si } x \notin f(E) \end{cases} \end{aligned}}$$

Alors φ est bien définie car tout élément de E admet au plus un antécédent par f par définition de l'injectivité de f.

De plus : $\quad \forall y \in E, \ \varphi(f(y)) = y$

C'est que $\quad \boxed{\varphi \circ f = id_E}$



6. $\underline{\text{(1°) Je suppose } f \text{ injective. Je montre que } D_f \text{ est surjective.}}$

Soit $\psi \in E^E$. Je cherche $\varphi \in E^E$ telle que
$$D_f(\varphi) = \psi$$
i.e.
$$\varphi \circ f = \psi,$$
i.e.
$$\psi = \varphi \circ f.$$
Soit, d'après 5., $\theta \in E^E$ telle que
$$id_E = \theta \circ f,$$
(car f est injective)

Alors $\quad \psi = \psi_0 \circ id_E = \psi_0 \circ \theta \circ f$

D'où $\quad \psi = D_f(\psi_0 \circ \theta)$.

Donc $\quad \varphi = \psi_0 \circ \theta \quad$ convient.

C'est fait !

(2°) Je suppose D_f surjective.

Je montre que f est injective.

Soient x_0 et x_1 dans E tels que

$$f(x_0) = f(x_1)$$

Comme $id_E \in E^E$ et que D_f est surjective, soit $\varphi \in E^E$ tel que

$$id_E = D_f(\varphi) = \varphi \circ f.$$

Alors $$\varphi(f(x_0)) = \varphi(f(x_1))$$

i.e. $$id_E(x_0) = id_E(x_1)$$

D'où $$x_0 = x_1$$

C'est fait !

(3°) D'où l'équivalence.

7. (1°) Je suppose qu'il existe $\theta \in E^E$ telle que $\quad \psi = \varphi \circ \theta$.

Je montre que $\psi(E) \subset \varphi(E)$.

Soit $y \in E$. Je suppose que
$$y \in \psi(E).$$
Ainsi, soit $x \in E$ tel que
$$y = \psi(x)$$
Par hypothèse, soit $\theta \in E^E$ telle que
$$\cancel{\psi = \theta \circ \varphi} \quad \psi = \varphi \theta.$$
Alors
$$\psi(x) = \varphi(\theta(x))$$
$$y = \varphi(\theta(x))$$
Donc
$$y \in \varphi(E).$$

C'est fait !

(Autre manière : $\psi(E) = \varphi(\theta(E)) \subset \varphi(E)$)

(2°) Je suppose $\psi(E) \subset \varphi(E)$.

Je cherche $\theta \in E^E$ telle que
$$\psi = \varphi \circ \theta$$
i.e. $\forall x \in E, \quad \varphi(\theta(x)) = \psi(x)$

i.e. $\forall x \in E, \quad \theta(x) \in \varphi^{-1}(\{\psi(x)\})$.

Or $\forall x \in E, \quad \varphi^{-1}(\{\psi(x)\}) \neq \emptyset$

(Car $\psi(E) \subset \varphi(E)$, donc $\psi(x) \in \varphi(E)$ pour tout $x \in E$)

Donc, d'après l'axiome admis, une <u>telle fonction θ existe bien</u>.

(3°) D'où l'équivalence.

8. (1°) <u>Je suppose f surjective.</u>

<u>Je montre que G_f est surjective et que D_f est injective.</u>

Comme f est surjective,

$$E \subset f(E)$$

i.e.

$$id_E(E) \subset f(E).$$

Donc, d'après 7., soit $\theta \in E^E$ telle que

$$id_E = f \circ \theta.$$

. Soit $\varphi \in E^E$. Comme au 6.,

$$\varphi = id_E \circ \varphi = f \circ (\theta \circ \varphi)$$

i.e

$$\varphi = G_f(\theta \circ \varphi)$$

Donc <u>G_f est surjective</u>.

. Soient φ_0 et φ_1 dans E^E.

Si $D_f(\varphi_0) = D_f(\varphi_1)$, alors

$$\varphi_0 \circ f = \varphi_1 \circ f;$$

$$\varphi_0 \circ f \circ \theta = \varphi_1 \circ f \circ \theta;$$

$$\varphi_0 = \varphi_1$$

Donc D_f est injective.

(2°) Je suppose f non surjective.
Je montre que G_f est non surjective et D_f non injective.

Comme f est non surjective, soit $y_0 \in E$ tel que $y_0 \notin f(E)$.

- Alors $id_E(E) \not\subset f(E)$, donc d'après 7., pour tout $\theta \in E^E$,

$$id_E \neq f \circ \theta$$

i.e $\quad id_E \neq G_f(\theta)$

Donc $\quad id_E \notin G_f(E^E)$

C'est que G_f n'est pas surjective.

- Comme E possède au moins deux éléments, soit $y_1 \in E$ tel que

$$y_1 \neq y_0.$$

Soit $\varphi : E \longrightarrow E$
$$y \longmapsto \begin{cases} y & \text{si } y \neq y_0 \\ y_1 & \text{si } y = y_0 \end{cases}$$

Alors, $\forall x \in E$,
$$id_E(f(x)) = f(x) = \varphi(f(x))$$

(Car $y_0 \notin f(E)$, donc $f(x) \neq y_0$ pour tout $x \in E$).

C'est que $id_E \circ f = \varphi \circ f$

$$\begin{cases} D_f(id_E) = D_f(\varphi) \\ id_E \neq \varphi \end{cases}$$

Donc <u>D_f n'est pas injective.</u>

(3°) En conclusion, les assertions (i), (ii) et (iii) sont <u>toutes les trois vraies ou toutes les trois fausses.</u>

9. On a :

$$\forall \varphi \in E^E, \begin{cases} f^{-1} \circ (f \circ \varphi \circ f^{-1}) \circ f = \varphi \\ f \circ (f^{-1} \circ \varphi \circ f) \circ f^{-1} = \varphi \end{cases}.$$

C'est que $\begin{cases} C_{f^{-1}} \circ C_f = id_{E^E} \\ C_f \circ C_{f^{-1}} = id_{E^E} \end{cases}$

(Car $(f^{-1})^{-1} = f$)

Donc C_f est bijective et $\boxed{(C_f)^{-1} = C_{f^{-1}}}$

10. (1°) Pour $D_\sigma(f)$: symétrie d'axe $(O, \vec{j})$; car $D_\sigma(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(-x)$.
(2°) Pour $G_\sigma(f)$: symétrie d'axe $(O, \vec{i})$; car $G_\sigma(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -f(x)$.
(3°) Pour $D_{\tau_a}(f)$: translation de vecteur $-a\vec{i}$; car $D_{\tau_a}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x+a)$.
(4°) Pour $G_{\tau_a}(f)$: translation de vecteur $a\vec{j}$; car $G_{\tau_a}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)+a$.

11. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On a
(1°) $D_\sigma(f) = f \iff \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$
(2°) $G_\sigma(f) = f \iff \forall x \in E, -f(x) = f(x)$
(3°) $D_\sigma \circ G_\sigma(f) = f \iff \forall x \in E \; -f(-x) = f(x)$
(4°) $D_{\tau_a}(f) = f \iff \forall x \in E, f(x+a) = f(x)$

D'où $\mathrm{Fix}(D_\sigma)$, $\mathrm{Fix}(G_\sigma)$, $\mathrm{Fix}(D_\sigma \circ G_\sigma)$ et $\mathrm{Fix}(D_{\tau_a})$ sont respectivement l'ensemble des fonctions paires, l'ensemble constitué de la seule fonction nulle, l'ensemble des fonctions impaires et l'ensemble des fonctions a-périodiques.

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Je raisonne par récurrence sur n.

(I) Je suppose $n=0$.

Alors $f(u_n) = f(u_0) = f(x)$.

(H) Je suppose $n \geq 1$ tel que

$$f(u_{n-1}) = f(x).$$

Or $u_n = \sin(u_{n-1})$

Donc $f(u_n) = f(u_{n-1})$;

(Car $f \in \mathrm{Fix}(D\sin)$)

i.e. $f(u_n) = f(x)$.

(C) En conclusion, d'après le principe de récurrence,

$$f(u_n) = f(x) ;$$

et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.

13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Je montre, par récurrence sur n, que

$$\mathcal{P}(n) : (0 \leq v_n \leq 1) \wedge (-v_n \leq u_{n+1} \leq v_n)$$

(I) Je suppose $n=0$.

- $v_0 = 1$ donc $0 \leq v_0 \leq 1$.
- $u_1 = \sin(x)$ donc $-1 \leq u_1 \leq 1$;

i.e. $-v_0 \leq u_1 \leq v_0$

Donc $\mathcal{P}(n)$.

(H) Je suppose $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(n-1)$,

i.e. $\left(0 \leq v_{n-1} \leq 1\right) \wedge \left(-v_{n-1} \leq u_n \leq v_{n-1}\right)$.

Or $-\frac{\pi}{2} \leq -1$ et $1 \leq \frac{\pi}{2}$

et sin est croissante sur $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Donc $\begin{cases} \sin(0) \leq \sin(v_{n+1}) \leq \sin(1) \\ \sin(-v_{n-1}) \leq \sin(u_n) \leq \sin(v_{n-1}) \end{cases}$

D'où $\mathcal{P}(n)$ car sin est impaire et $\sin(1) \leq 1$.

(C) D'où le résultat.

14. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 13.

$$v_n \in [0,1].$$

Donc $0 \leq \sin(v_n) \leq v_n$

i.e $0 \leq v_{n+1} \leq v_n$

La suite (v_n) est bornée et monotone donc elle converge vers une limite v_∞.

Par passage à la limite et par continuité de sin en v_∞,

$$\begin{cases} v_\infty \in [0,1] \subset [0, \frac{\pi}{2}] \\ v_\infty = \sin(v_\infty) \end{cases}$$

Donc $v_\infty = 0$. D'où

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 0}$$

15. • On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-v_{n-1} \leq u_n \leq v_{n-1}$.

Donc par encadrement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

• Or, $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(x) = f(u_n)$

Donc, par continuité de f en 0,

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(0)$$

Ainsi <u>f est constante</u>.

• Réciproquement, toute fonction constante appartient à A.

• <u>En conclusion, A est constitué des fonctions constantes</u>.