# TD 6
# Techniques d'intégration sur un segment

## 1 Exercices corrigés en classe – calculs avancés

**NB : comme il y a eu beaucoup d'exercices dans le poly de cours, ces exercices sont plus difficiles. C'est normal !**

**Exercice 1.** Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$, ...
*Indication : On pourra écrire* $\dfrac{1}{\cos(x)} = g(\sin(x))\cos(x)$ *où g est une fonction (et faire éventuellement le changement de variables* $y = \sin(x)$ *si on ne voit pas d'intégration directe).*

**Exercice 2.** *Lemme de Riemann-Lebesgue*. Soit $f$ une fonction $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a, b]$. Démontrer que, si $\omega \in \mathbb{R}^*$,

$$\int_a^b f(t)\sin(n\omega t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

**Exercice 3.** Représenter la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \max(x, t)dt$.

**Exercice 4.** Démontrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}dt$ est dérivable et déterminer une expression de sa dérivée.

**Exercice 5.** À l'aide d'un joli dessin, expliquer pourquoi la suite $\left(\displaystyle\int_0^{4\pi n} \frac{\sin(t)}{t}dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

## 2 Exercices à faire en TD

**Exercice 6.** *Calculs directs*. ◐○○ - ●◐○ Calculer les intégrales ou primitives suivantes, sans utiliser ni IPP, ni changement de variable.

1. $\displaystyle\int_{-2}^3 (y^2 - y + 4)dy$,
2. $\displaystyle\int_0^2 x e^{-3x^2}dx$,
3. $\displaystyle\int^x \frac{1}{(3t+2)^2}dt$,
4. $\displaystyle\int_1^4 \frac{\ln(t)}{t}dt$,
5. $\displaystyle\int^x \frac{1}{t\ln(t)}dt$,
6. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)dx$,
7. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos(x)dx$,
8. $\displaystyle\int_{-1}^1 \operatorname{sh}(t)dt$,
9. $\displaystyle\int^x \tan^2(t)dt$,
10. $\displaystyle\int^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\operatorname{Arcsin}(t)}$,
11. $\displaystyle\int^x \frac{\sin(2\theta)}{1+\cos^2(\theta)}d\theta$
12. $\displaystyle\int^x \frac{dt}{\cos^2(t)\tan(t)}$.

**Correction 1.** Ici il s'agit toujours d'intégration directe !

 walter.ngambou@ac-versailles.fr

1. $\displaystyle\int_{-2}^{3} y^2 - y + 4dy = \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 4y\right]_{-2}^{3} = 9 - \frac{9}{2} + 36 - \frac{-8}{3} + \frac{4}{2} - 4\times(-2) = \frac{175}{6}$
2. $\displaystyle\int_{0}^{2} x\mathrm{e}^{-3x^2}dx = \left[\frac{\mathrm{e}^{-3x^2}}{-6}\right]_{0}^{2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6\mathrm{e}^{12}}$
3. $\displaystyle\int^{x} \frac{1}{(3t+2)^2}dt = -\frac{1}{3(3x+2)}$
4. $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{\ln(t)}{t}dt = \left[\frac{(\ln(t))^2}{2}\right]_{1}^{4} = 2\ln(2)^2$
5. $\displaystyle\int^{x} \frac{1}{t\ln(t)}dt = \ln|\ln(x)|$
6. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)dx = [-\cos(x)]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$
7. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos(x)dx = \left[\frac{\sin(x)^2}{2}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{8}$
8. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{sh}(t)dt = [ch(t)]_{-1}^{1} = 0$
9. $\displaystyle\int^{x} \tan^2(t)dt = \int^{x} 1 + \tan^2(t) - 1dt = \tan(x) - x$

**Exercice 7.** *Intégration par parties*. ●○○ - ●●○ Calculer les intégrales suivantes, en utilisant une intégration par parties.

1. $\displaystyle\int_0^2 t\mathrm{e}^t dt,$
2. $\displaystyle\int_1^2 \ln\frac{t-1}{t+1}dt,$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\theta}{\cos^2(\theta)}d\theta$
4. $\displaystyle\int^x t^2\mathrm{e}^t dt,$
5. $\displaystyle\int_0^y \ln(1+x^2)dx,$
6. $\displaystyle\int^x \mathrm{Arcsin}(t)dt,$
7. $\displaystyle\int^x t\mathrm{ch}(t)dt,$
8. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\cos(t)dt.$

**Correction 2.** **1.** Pour calculer

$$\int_0^2 t\mathrm{e}^t dt,$$

Posons $u(t) = t$, $v'(t) = \mathrm{e}^t$. Donc $u'(t) = 1$, $v(t) = \mathrm{e}^t$. Donc, par intégration par parties,

$$\int_0^2 t\mathrm{e}^t dt = [t\mathrm{e}^t]_0^2 - \int_0^2 \mathrm{e}^t dt = 2\mathrm{e}^2 - e^2 + 1 = \mathrm{e}^2 + 1.$$

**2.** Pour calculer

$$\int t^2\mathrm{e}^t dt,$$

Posons $u(t) = t^2$, $v'(t) = \mathrm{e}^t$. Donc $u'(t) = 2t$, $v(t) = \mathrm{e}^t$. Donc, par intégration par parties,

$$\int t^2\mathrm{e}^t dt = t^2\mathrm{e}^t - 2\int t\mathrm{e}^t dt.$$

Puis on fait une deuxième intégration par parties, en posant $u(t) = t$, $v'(t) = \mathrm{e}^t$, donc $u'(t) = 1$ et $v(t) = \mathrm{e}^t$. D'où

$$\int t^2\mathrm{e}^t dt = t^2\mathrm{e}^t - 2t\mathrm{e}^t + 2\int \mathrm{e}^t dt = \mathrm{e}^t(t^2 - 2t + 2).$$

3. On pose $u(\theta) = \theta$, donc $u'(\theta) = 1$ et $v(\theta) = \tan(\theta)$ donc $v'(\theta) = \dfrac{1}{\cos^2(\theta)}$. Ainsi, par IPP,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\theta}{\cos^2(\theta)} d\theta = [\theta\tan(\theta)]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(\theta)d\theta) = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - [-\ln(\cos(\theta))]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln(2).$$

4. On pose $u'(s) = 1$, $v(s) = \mathrm{Arcsin}(s)$, alors $u(s) = s$ et $v'(s) = \dfrac{1}{\sqrt{1-s^2}}$ donc

$$\int^x \mathrm{Arcsin}(s)ds = x\mathrm{Arcsin}(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x\mathrm{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2}.$$

5. Posons $u(x) = x$, $v'(x) = \mathrm{ch}(x)$. Alors $u'(x) = 1$, $v(x) = \mathrm{sh}(x)$. Donc, par IPP,

$$\int x\mathrm{ch}(x)dx = x\mathrm{sh}(x) - \int \mathrm{sh}(x)dx = x\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x).$$

6. Posons $u(t) = \mathrm{e}^{2t}$, $v'(t) = \cos(t)$, alors $u'(t) = 2\mathrm{e}^{2t}$ et $v(t) = \sin(t)$. Donc

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\cos(t)dt = [\mathrm{e}^{2t}\sin(t)]_0^1 - \int_0^1 2\mathrm{e}^{2t}\sin(t)dt.$$

Dans la deuxième intégrale, on pose $u(t) = \mathrm{e}^{2t}$ et $v'(t) = -\sin(t)$. Alors $u'(t) = 2\mathrm{e}^{2t}$ et $v(t) = \cos(t)$ donc

$$\mathrm{I} = \mathrm{e}^2\sin(1) + [2\mathrm{e}^{2t}\cos(t)]_0^1 - \int_0^1 4\mathrm{e}^{2t}\cos(t)dt = \mathrm{e}^2\sin(1) + 2\mathrm{e}^2\cos(1) - 2 - 4\mathrm{I},$$

donc $5\mathrm{I} = \mathrm{e}^2\sin(1) + 2\mathrm{e}^2\cos(1)$ donc $\mathrm{I} = \dfrac{\mathrm{e}^2}{5}\sin(1) + \dfrac{2}{5}\mathrm{e}^2\cos(1) - \dfrac{2}{5}$.

**Exercice 8.** *Changement de variable*. ●○○ - ●●○ Calculer les intégrales suivantes, en effectuant des changements de variable adéquats.

1. $\displaystyle\int^x \frac{dt}{t+\sqrt{t}}$,
2. $\displaystyle\int_2^y \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$, où $y > 1$,
3. $\displaystyle\int_1^y \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}dt$,
4. $\displaystyle\int_{-1}^1 \theta^2\sqrt{1-\theta^2}d\theta$,
5. $\displaystyle\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)+\cos(t)}dt$,
6. $\displaystyle\int^x \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}dt$.

**Correction 3.** 1. Pour calculer $\int^x \frac{dt}{t+\sqrt{t}}$, effectuons un changement de variables :

- Posons $u = \sqrt{t}$. Alors $t = u^2$.
- $\frac{1}{t+\sqrt{t}} = \frac{1}{u^2+u}$
- $\frac{dt}{du} = 2u$ donc $dt = 2udu$
- Donc $\int^x \frac{dt}{t+\sqrt{t}} = \int^{\sqrt{x}} \frac{2u}{u^2+u} du = \int^{\sqrt{x}} \frac{2}{1+u} = 2\ln(1+\sqrt{x})$.

2. Effectuons un changement de variables.
   - Posons $u = \sqrt{x-1}$. Alors $x = u^2+1$.
   - Quand $x = 2$, $u = 1$. Quand $x = y$, $u = \sqrt{y-1}$.
   - $\frac{x}{\sqrt{x-1}} = \frac{u^2+1}{u}$.
   - $x = u^2+1$ donc $dx = 2udu$.

   Donc

$$\begin{aligned}\int_2^y \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx &= \int_1^{\sqrt{y-1}} \frac{u^2+1}{u} 2udu = 2\int_1^{\sqrt{y-1}} u^2+1du \\ &= 2\left[\frac{u^3}{3}+u\right]_1^{\sqrt{y-1}} = \frac{\sqrt{y-1}^3}{3} + \sqrt{y-1} - \left(\frac{1}{3}+1\right)\end{aligned}$$

3. Pour calculer $\int_1^y \frac{1}{\mathrm{ch}(t)} dt$, effectuons un changement de variables.
   - Posons $s = \mathrm{e}^t$.
   - Quand $t = 1$, $s = \mathrm{e}$. Quand $t = y$, $s = \mathrm{e}^y$.
   - $\frac{1}{\mathrm{ch}(t)} = \frac{2}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}} = \frac{2}{s+\frac{1}{s}}$.
   - $y = \ln(s)$ donc $dy = \frac{ds}{s}$.

   *Comment peut-on penser à ce changement de variables ? Déjà on essaie de poser* $\mathrm{ch}(t)$ *comme nouvelle variable, et on voit que ça n'aboutit à rien. Du coup on décompose* $\mathrm{ch}(t)$ *pour voir si un de ses « morceaux » peut être la nouvelle variable : c'est le cas !* Donc

$$\begin{aligned}\int_1^y \frac{1}{\mathrm{ch}(t)} dt &= \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^y} \frac{2}{s+\frac{1}{s}} \frac{ds}{s} \\ &= \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^y} \frac{2}{s^2+1} ds \\ &= 2\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^y) - 2\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}).\end{aligned}$$

4. Pour calculer $\int_{-1}^1 \theta^2\sqrt{1-\theta^2}d\theta$, effectuons le changement de variables suivant
   - posons $\theta = \sin(x)$, i.e. $x = \mathrm{Arcsin}(\theta)$. (en cours on a fait avec cos, donc je change !)
   - quand $\theta = -1$, $x = -\frac{\pi}{2}$. Quand $\theta = 1$, $x = \frac{\pi}{2}$.

- $\theta^2\sqrt{1-\theta^2} = \sin^2(x)\sqrt{1-\sin^2(x)}$. Or, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos(x) \geqslant 0$, donc $\sqrt{1-\sin^2(x)} = \cos(x)$. DOnc
$$\theta^2\sqrt{1-\theta^2} = \sin^2(x)\cos(x)$$
- $\theta = \sin(x)$, donc $d\theta = \cos(x)dx$.

*Comment penser à ce changement de variables ? Là, c'est la formule* $\sin^2 + \cos^2 = 1$ *qui doit résonner dans votre tête quand vous voyez* $\sqrt{1-\theta^2}$ *!*

Donc
$$\int_{-1}^{1} \theta^2\sqrt{1-\theta^2}d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^2(x)dx.$$

Or, $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$, donc
$$\sin^2(x)\cos^2(x) = \frac{1}{4}\sin^2(2x) = \frac{1}{8}(1-\cos(4x)).$$

Donc
$$\int_{-1}^{1} \theta^2\sqrt{1-\theta^2}d\theta = \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos(4x)dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(4x)dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{32}[\sin(4x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$$

5. Pour calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)+\cos(t)}dt$, effectuons le changement de variables suivant
   - $u = \tan(t/2)$, donc $t = 2\text{Arctan}(u)$.
   - quand $t = 0$, $u = 0$ ; quand $t = \frac{\pi}{2}$, $u = 1$.
   - On sait que $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ et que $\sin(t) = \frac{2u}{1+u^2}$, donc
   $$\frac{1}{\sin(t)+\cos(t)} = \frac{1}{\frac{2u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2}} = \frac{1+u^2}{1+2u-u^2}$$
   - $t = 2\text{Arctan}(u)$ donc $dt = \frac{2du}{1+u^2}$.

   Donc
   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)+\cos(t)}dt = \int_0^1 \frac{1+u^2}{1+2u-u^2}\frac{2du}{1+u^2} = 2\int_0^1 \frac{1}{1+2u-u^2}du.$$
   Or, $1+2u-u^2 = -\left(u-1-\sqrt{2}\right)(u-1+\sqrt{2})$, donc
   $$\frac{1}{1+2u-u^2} = -\frac{1}{\left(u-1-\sqrt{2}\right)\left(u-1+\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{u-1+\sqrt{2}} - \frac{1}{u-1-\sqrt{2}}\right),$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)+\cos(t)}dt &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \left(\frac{1}{u-1+\sqrt{2}} - \frac{1}{u-1-\sqrt{2}}\right)du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left[\ln(u-1+\sqrt{2}\right]_0^1 - [\ln(1+\sqrt{2}-u)]_0^1\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln(\sqrt{2}) - \ln(\sqrt{2}-1) - \ln(\sqrt{2}) + \ln(1+\sqrt{2})\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)
\end{aligned}$$

Pour info, $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \text{Argth}(x)$, mais c'est totalement hors programme.

**Exercice 9.** *Orthogonalité des fonctions trigonométriques*. ●◐○ Déterminer, en fonction de la valeur de $m$ et $n$ entiers, la valeur de l'intégrale

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)dt.$$

**Correction 4.** Il faut pour cet exercice écrire $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$. Donc

$$\begin{aligned}
I_{m,n} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos((m+n)t) + \cos((m-n)t))dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((m+n)t)dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((m-n)t).
\end{aligned}$$

Or,

$$\int_0^{2\pi} \cos(\alpha t)dt = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha \neq 0 \\ 2\pi \text{ sinon} \end{cases}$$

Donc

$$I_{m,n} = \begin{cases} 0 \text{ si } m+n \neq 0 \text{ et } m-n \neq 0 \\ \pi \text{ si } m+n = 0 \text{ et } m-n \neq 0 \\ \pi \text{ si } m-n = 0 \text{ et } m+n \neq 0 \\ 2\pi \text{ si } m+n = 0 \text{ et } m-n = 0, \text{ i.e. } m=n=0. \end{cases}$$

**Exercice 10.** ●●○ Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x$ de $[a,b]$, $f(a+b-x) = f(x)$.

1. Interpréter l'égalité en termes de graphe de $f$.

   **Correction 5.** Cela signifie que le graphe de $f$ a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \frac{a+b}{2}$.

2. Montrer que

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

**Correction 6.** Appelons $\mathrm{I}$ l'intégrale $\int_a^b xf(x)dx$. Effectuons dans cette intégrale le changement de variables $y = a + b - x$. Alors quand $x = a$, $y = b$ et quand $x = b$, $y = a$. Ensuite, $xf(x) = (a + b - y)f(a + b - y) = (a + b - y)f(y)$. Ensuite, $dx = -dy$. Donc

$$\mathrm{I} = \int_b^a (a+b-y)f(y)(-dy) = \int_a^b (a+b-y)f(y)dy = \int_a^b (a+b)f(y)dy - \int_a^b yf(y)dy = (a+b)\int_a^b f(y)dy - \mathrm{I},$$

donc $2\mathrm{I} = (a+b)\int_a^b f(y)dy$ donc $\mathrm{I} = \dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(y)dy$.

**3.** Application : calculer

$$\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx.$$

**Correction 7.** On remarque que si on pose $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$, alors pour tout $x$, $f(\pi - x) = \dfrac{\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)} = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$, donc, d'après le lemme précédent,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx \\ &= \frac{\pi}{2}\left[-\mathrm{Arctan}(\cos(x))\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}\left(-\mathrm{Arctan}(-1) + \mathrm{Arctan}(1)\right) = \frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

**Exercice 11.** ●●○ Pour tous entiers naturels $n$ et $p$ on pose

$$I_{n,p} = \int_0^1 t^n(1-t)^p dt.$$

**1.** Montrer que pour tout $n$ non nul et pour tout $p$ entier,

$$I_{n,p} = \frac{n}{p+1} I_{n-1,p+1}.$$

**Correction 8.** Soient $n$ non nul et $p$ dans $\mathbb{N}$. Posons, dans $\mathrm{I}_{n,p}$, $u(t) = t^n$ et $v'(t) = (1-t)^p$. Alors $u'(t) = nt^{n-1}$ et $v(t) = -\dfrac{1}{p+1}(1-t)^{p+1}$. Donc, par intégration par parties,

$$\mathrm{I}_{n,p} = \left[t^n \frac{1}{p+1}(1-t)^{p+1}\right]_0^1 - \int_0^1 nt^{n-1}\frac{(-1)}{p+1}(1-t)^{p+1}dt = \frac{n}{p+1}\mathrm{I}_{n-1,p+1},$$

d'où le résultat.

**2.** En déduire une expression de $I_{n,p}$ pour tous $n$ et $p$ entiers.

**Correction 9.** Je ne fais pas les récurrences, mais on montre par récurrence sur que pour tout $n$ et $p$, $\mathrm{I}_{n,p} = \dfrac{n!}{(p+1)(p+2)\dots(p+n)}\mathrm{I}_{0,p+n} = \dfrac{n!}{(p+1)(p+2)\dots(p+n+1)} = \dfrac{n!p!}{(p+n+1)!}$.

**Exercice 12.** ●●● Calculer, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$.

**Correction 10.** Effections une IPP, avec $u(x) = x^n$ et $v'(x) = \sqrt{1-x}$. Alors $u'(x) = nx^{n-1}$ et $v(t) = -\dfrac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= \left[x^n \frac{-2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \int_0^1 nx^{n-1}\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}dx \\
&= \frac{2n}{3}(\mathrm{I}_{n-1} - \mathrm{I}_n),
\end{aligned}$$

donc $3\mathrm{I}_n = 2n\mathrm{I}_{n-1} - 2n\mathrm{I}_n$, i.e. $\mathrm{I}_n = \dfrac{2n}{2n+3}\mathrm{I}_{n-1}$. En poursuivant, on obtient

$$\mathrm{I}_n = \frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n+3)(2n+1)\dots 5}\mathrm{I}_0 = \frac{2^n n!}{(2n+3)(2n+1)\dots 3}.$$

**Exercice 13.** *Une suite d'intégrales – extrait DS 2020-2021*. ●●○ Pour tout $k$ dans $\mathbb{N}^*$, on note $\varphi_k$ la fonction

$$\varphi_k : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}^k(t)} \end{array}\right.$$

On admet l'existence de $\varphi_k(x)$ pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$ et pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ étant donné que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^k(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$, pour $x$ fixé.

   **Correction 11.**

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}(t)} = 2\int_0^x \frac{dt}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} = 2\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+(\mathrm{e}^t)^2}dt \\
&= 2[\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^t)]_0^x = \boxed{2\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

   Tiens, tiens, on reconnaît le gudermannien... souvenirs !
   Ensuite, on rappelle que $th' = \dfrac{\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2}{\mathrm{ch}^2} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$, donc

$$\varphi_2(x) = \int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}^2(t)} = [\mathrm{th}(t)]_0^x = \mathrm{th}(x).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \varphi_{k+2}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{(k+1)\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + \frac{k}{k+1}\varphi_k(x).$$

   **Correction 12.** (Étant donnée l'indication, partons de $\varphi_k(x)$) **Soit** $k$ dans $\mathbb{N}^*$. Alors

$$\varphi_k(x) = \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^k(x)} = \frac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{ch}^{k+1}(t)}.$$

Posons $u'(t) = \mathrm{ch}(t)$, alors $u(t) = \mathrm{sh}(t)$, et $v(t) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^{k+1}(t)}$, alors $v'(t) = -(k+1)\dfrac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^{k+2}(t)}$.
Donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\varphi_k(x) &= \left[\mathrm{sh}(t)\frac{1}{\mathrm{ch}^{k+1}(t)}\right] + \int_0^x \mathrm{sh}(t)(k+1)\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^{k+2}(t)}\\
&= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + (k+1)\int_0^x \frac{\mathrm{sh}^2(t)}{\mathrm{ch}^{k+2}(t)}dt\\
&= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + (k+1)\int_0^x \frac{\mathrm{ch}^2(t)-1}{\mathrm{ch}^{k+2}(t)}dt\\
&= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + (k+1)\int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^{k}(t)}dt - (k+1)\int_0^x \frac{-1}{\mathrm{ch}^{k+2}(t)}dt\\
&= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + (k+1)\varphi_k(x) - (k+1)\varphi_{k+2}(x),
\end{aligned}$$

donc

$$-k\varphi_k(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} - (k+1)\varphi_{k+2}(x),$$

donc

$$\boxed{\varphi_{k+2}(x) = \frac{1}{k+1}\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + \frac{k}{k+1}\varphi_k(x)}$$

**3.** En déduire les valeurs de $\varphi_3(x)$ et $\varphi_4(x)$.

**Correction 13.** On en déduit que

$$\boxed{\varphi_3(x) = \varphi_{1+2}(x) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} + \mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^x)} - \frac{\pi}{4},$$

et

$$\boxed{\varphi_4(x) = \frac{1}{3}\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^3(x)} + \frac{2}{3}\mathrm{th}(x).}$$

**Étude des fonctions $\varphi_k$ Dans cette partie**, $k$ est un entier naturel non nul fixé.

**4.** Démontrer que $\varphi_k$ est impaire.

**Correction 14.** Soit $x$ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\varphi_k(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{\mathrm{ch}(t)}.$$

Posons $s = -t$. Alors quand $t = 0$, $s = 0$ et quand $t = -x$, $s = x$.
Ensuite $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)} = \dfrac{1}{\mathrm{sh}(-s)} = \dfrac{1}{\mathrm{sh}(s)}$.
Enfin, $\dfrac{dt}{ds} = -1$ donc $dt = -ds$. Donc

$$\boxed{\varphi_k(-x) = -\int_0^x \frac{ds}{\mathrm{ch}(s)} = -\varphi_k(x).}$$

$\boxed{\text{Donc } \varphi_k \text{ est impaire.}}$

**5.** On admet la dérivabilité de $\varphi_k$. Calculer, pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $\varphi_k'(x)$ et en déduire le sens de variation de $\varphi_k$ sur $\mathbb{R}$. En déduire son signe sur $\mathbb{R}$.

**Correction 15.** Par définition, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^k(t)}dt$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^k(x)}$ donc la dérivée de $\varphi_k$ est $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^k(x)} \geqslant 0$, positive de $\mathbb{R}$, donc $\varphi_k$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
On vient de voir que $\varphi_k$ est croissante et $\varphi_k(0) = 0$ donc $\varphi_k$ est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$.

**6.** Démontrer que $\varphi_1$ et $\varphi_2$ ont des limites en $+\infty$, et les déterminer.

**Correction 16.** On sait que $\varphi_1 : x \mapsto 2\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^x) - \dfrac{\pi}{2}$. Or, $\mathrm{e}^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\mathrm{Arctan}(y) \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$ donc $\varphi_1(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \pi - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.
De plus, $\varphi_2(x) = \mathrm{th}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'où les deux limites demandées.

**7.** En utilisant la question 2., démontrer que pour tout $k$ dans $\mathbb{N}^*$, $\varphi_k(x)$ admet une limite quand $x$ tend vers $+\infty$.

**Correction 17.** Soit pour tout $k$ dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_k$ la proposition « $\varphi_k(x)$ converge quand $x \to +\infty$. »
Démontrons $(\mathcal{P}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ par récurrence double sur $k$.
**Initialisation.** $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies par la question précédente.
**Hérédité.** Supposons $\mathcal{P}_k$ et $\mathcal{P}_{k+1}$ vraies pour un certain rang $k$. Alors $\varphi_k(x)$ a une limite quand $x$ tend vers $+\infty$. Or, pour tout $x$,

$$\varphi_{k+2}(x) = \frac{1}{k+1}\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + \frac{k}{k+1}\varphi_k(x),$$

Or, $\mathrm{sh}(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$ et $\mathrm{ch}(x) \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$, donc $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} \leqslant \dfrac{2^{k+1}}{\mathrm{e}^{(k+1)x}}$, donc pour tout $x \geqslant 0$,

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} \leqslant \frac{2^k}{\mathrm{e}^{kx}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc, par encadrement, $\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme $\varphi_k(x)$ possède une limite finie quand $x$ tend vers $+\infty$, cela démontre que $\varphi_{k+2}(x)$ possède une limite finie quand $x$ tend vers $+\infty$.
D'où l'hérédité, et le résultat par le principe de récurrence.

On note, pour tout $k$ dans $\mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_k = \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_k(x)$.

**8.** Toujours en utilisant la question 2., démontrer que pour tout $k$ dans $\mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_{k+2} = \dfrac{k}{k+1}\mathrm{I}_k$.

**Correction 18.** Soit $k$ dans $\mathbb{N}^*$ Par 2., pour tout $x$,

$$\varphi_{k+2}(x) = \frac{1}{k+1}\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + \frac{k}{k+1}\varphi_k(x),$$

Comme on a vu que $\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $\boxed{\mathrm{I}_{k+2} = \dfrac{k}{k+1}\mathrm{I}_k}$.

**9.** Soit la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k = k\mathrm{I}_k\mathrm{I}_{k+1}$. Démontrer que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est constante et préciser la valeur de cette constante.

**Correction 19.** Soit $k$ dans $\mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (k+1)\mathrm{I}_{k+2}\mathrm{I}_{k+1} \\ &= (k+1)\frac{k}{k+1}\mathrm{I}_k\mathrm{I}_{k+1} \text{ par la question précédente} \\ &= (k+1)\mathrm{I}_{k+1}\mathrm{I}_k = a_k, \end{aligned}$$

$\boxed{\text{donc } (a_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ est constante, égale à } a_1 = 2\mathrm{I}_0\mathrm{I}_1 = \pi.}$

**10.** Déterminer, pour tout $k \geqslant 1$, les valeurs de $\mathrm{I}_{2k}$ et $\mathrm{I}_{2k+1}$.

**Correction 20.** Démontrons par récurrence que pour tout $k$ dans $\mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{Q}_k$ : $\mathrm{I}_{2k} = \frac{4^k(k!)^2}{(2k)!(2k)}$ est vraie.

**Initialisation.** $\mathrm{I}_2 = 1 = \frac{4^1(1!)^2}{(2)!(2\times 1)}$, donc l'initialisation est vraie.
**Hérédité.** Supposons $\mathcal{Q}_k$ vraie pour un certain rang $k$. Alors, par la question 8.,

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_{2(k+2)} = \mathrm{I}_{2k+2} &= \frac{2k}{2k+1}\mathrm{I}_{2k} \\ &= \frac{2k}{2k+1}\frac{4^k(k!)^2}{(2k)!(2k)} \\ &= \frac{4^k(k!)^2}{(2k+1)!} \\ &= \frac{4(k+1)^2}{(2k+2)(2k+2)}\frac{4^k(k!)^2}{(2k+1)!} \\ &= \frac{4^{k+1}((k+1)!)^2}{(2(k+1))!(2(k+1))}, \end{aligned}$$

d'où l'hérédité, et, par le principe de récurrence, le résultat.
Soit alors $k$ dans $\mathbb{N}$. Alors

$$(2k)\mathrm{I}_{2k}\mathrm{I}_{2k+1} = \pi,$$

donc

$$\mathrm{I}_{2k+1} = \frac{\pi}{2k\mathrm{I}_{2k}} = \frac{(2k)!(2k)}{2k4^k(k!)^2}\pi = \boxed{\frac{(2k)!}{4^k(k!)^2}\pi}$$

**Exercice 14.** ●●○ Notre but est de calculer l'intégrale suivante : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\cos^2(t)}{\cos(2t)}dt$.

**1.** Montrer que cette intégrale est positive.

**Correction 21.** Pour tout $x$ dans $[0, \pi/8]$, $\cos^{2t} \geqslant 0$. Donc $\frac{\cos^2(t)}{\cos(2t)} \geqslant 0$, donc $\mathrm{I} \geqslant 0$.

On pose $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\sin^2(t)}{\cos(2t)}dt$.

**2.** Calculer $\mathrm{I} - J$.

**Correction 22.** On calcule

$$\begin{aligned}
I - J &= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\cos^2(t)}{\cos(2t)} dt - \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\sin^2(t)}{\cos(2t)} dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\cos^2(t) - \sin^2(t)}{\cos(2t)} dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\cos(2t)}{\cos(2t)} dt = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

**3.** Calculer $\mathrm{I} + J$.

**Correction 23.**

$$\mathrm{I} + J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\cos^2(t)}{\cos(2t)} dt + \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\sin^2(t)}{\cos(2t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\cos^2(t) + \sin^2(t)}{\cos(2t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{\cos(2t)} dt.$$

Posons maintenant $s = \tan(t)$ ! Alors

- quand $t = 0$ $s = 0$ ; quand $t = \frac{\pi}{8}$, $\tan(t) = \tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$
- $\frac{1}{\cos(2t)} = \frac{1 + s^2}{1 - s^2}$.
- $t = \text{Arctan}(s)$ donc $dt = \frac{ds}{1 + s^2}$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} + J &= \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{1 + s^2}{1 - s^2} \frac{ds}{1 + s^2} \\
&= \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{ds}{1 - s^2} \\
&= \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - s} + \frac{1}{1 + s} \right) ds \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{1 - s} ds + \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{1 + s} ds \\
&= -\frac{1}{2} (\ln(2 - \sqrt{2}) - \ln(1)) + \frac{1}{2} (\ln(\sqrt{2}) - \ln(1)) \\
&= -\frac{1}{2} \ln((2 - \sqrt{2})(\sqrt{2})) \\
&= -\frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} - 1).
\end{aligned}$$

**4.** En déduire la valeur de I.

**Correction 24.** On en déduit que $\mathrm{I} = \frac{\mathrm{I} - J + \mathrm{I} + J}{2} = \frac{\pi}{16} + -\frac{1}{4} \ln(\sqrt{2} - 1)$.

**Exercice 15.** ●●○ Soit $\omega = a + ib$ un complexe, ($a$, $b$ réels). Déterminer une primitive de

$$t \mapsto \frac{1}{t - \omega}.$$

**Correction 25.** Écrivons

$$\begin{aligned}\frac{1}{t-\omega} &= \frac{1}{t-a-ib}\\ &= \frac{t-a+ib}{(t-a)^2+b^2}\\ &= \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2} + ib\frac{1}{(t-a)^2+b^2}.\end{aligned}$$

Une primitive de $t \mapsto \dfrac{t-a}{(t-a)^2+b^2}$ est

$$\frac{1}{2}\ln((t-a)^2+b^2) = \ln\sqrt{(t-a)^2+b^2} = \ln|t-\lambda|,$$

avec $\lambda = a+ib = \omega$. Reste à déterminer une primitive de $t \mapsto b\dfrac{1}{(t-a)^2+b^2}$. On peut s'en sortir en calculant

$$\int_0^x b\frac{1}{(t-a)^2+b^2}dt,$$

mais ici il y a plus simple si on utilise l'énoncé ! Dérivons $g : t \mapsto \text{Arctan}\left(\dfrac{t-a}{b}\right)$ :

$$\begin{aligned}g'(t) &= \frac{1}{b}\frac{1}{1+\left(\frac{t-a}{b}\right)^2}\\ &= \frac{1}{b}\frac{b^2}{(t-a)^2+b^2}\\ &= \frac{b}{(t-a)^2+b^2}.\end{aligned}$$

d'où le résultat !

**Exercice 16.** *Lemme de Riemann-Lebesgue*. ●●● Soient $a$ et $b$ deux réels, $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable, de dérivée continue. Montrer que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left|\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{i\lambda t}dt\right| = 0.$$

*On pourra effectuer une intégration par parties.*

**Correction 26.** Exprimons $\displaystyle\int_a^b e^{it\lambda}f(t)dt$ d'une autre manière en effectuant une intégration par parties, avec

$$\begin{aligned}&u(t) = f(t),\ u'(t) = f'(t),\\ &v'(t) = e^{it\lambda},\ v(t) = \frac{1}{i\lambda}e^{it\lambda}.\end{aligned}$$

On obtient donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{it\lambda}f(t)dt &= \left[f(t)\frac{1}{i\lambda}e^{it\lambda}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\frac{1}{i\lambda}e^{it\lambda}dt\\ &= \frac{f(a)e^{ia\lambda}}{i\lambda} - \frac{f(b)e^{ib\lambda}}{i\lambda} - \frac{1}{i\lambda}\int_a^b f'(t)e^{it\lambda}dt.\end{aligned}$$

Maintenant, étant donné que

$$\boxed{\left|e^{i\omega}\right| = 1 \text{ pour tout réel } \omega},$$

on a

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left|\frac{f(a)e^{ia\lambda}}{i\lambda}\right| = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{|f(a)|}{|\lambda|} = 0.$$

De même,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left|\frac{f(b)e^{ib\lambda}}{i\lambda}\right| = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{|f(b)|}{|\lambda|} = 0.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{i\lambda}\int_a^b f'(t)e^{it\lambda}t\right| &\leqslant \frac{1}{|\lambda|}\left|\int_a^b f'(t)e^{it\lambda}dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|\lambda|}\int_a^b \left|f'(t)e^{it\lambda}\right|dt \\ &\leqslant \frac{1}{|\lambda|}\int_a^b |f'(t)|dt.\end{aligned}$$

Comme $f'$ est continue, $\displaystyle\int_a^b |f'(t)|\,dt$ est un nombre réel fini, et

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{|\lambda|}\int_a^b |f'(t)|\,dt = 0.$$

Donc, par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{i\lambda}\int_a^b f'(t)e^{it\lambda}dt = 0.$$

Finalement, on en déduit que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b e^{it\lambda}f(t)dt = 0.$$