N.Laillet - W.Ngambou
walter.ngambou@ac-versailles.fr

DM 06
à rendre le lundi 18 novembre

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur $\mathrm{I} =]0, +\infty[$ suivante :

$$xy' + ny = \frac{1}{1+x^2} \tag{E_n}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, définissons la fonction F_n par : $\forall x \geqslant 0, F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2}dt$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation différentielle linéaire homogène (H_n) associée à (E_n) :

$$xy' + ny = 0 \tag{H_n}$$

2. Résoudre (E_0).
On pourra chercher des réels a, b, c tels que : $\forall x > 0, \dfrac{1}{x(1+x^2)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{1+x^2}$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'ensemble des solutions de (E_n) en fonction de F_n.

4. Montrer que

$$\forall x \geqslant 0, F_n(x) = \frac{x^n}{n(1+x^2)} + \frac{2}{n}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{(1+t^2)^2}dt$$

5. Démontrer que pour tout $x > 0$

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(1+t^2)^2}dt \leqslant x^{n+2}.$$

6. En déduire qu'il existe une unique solution de (E_n) qui admet une limite finie en 0 (à préciser). On note cette solution z_n. Exprimer z_n en fonction de F_n et de x^n et démontrer que

$$\forall x > 0, z_n(x) = \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{1+x^2u^2}du$$

7. Soit z une solution de (E_n) et Z une primitive de z. Montrer qu'il existe un réel C tel que Z soit solution de l'équation différentielle d'inconnue y : $xy' + (n-1)y = \mathrm{Arctan}(x) + C$.

8. Démontrer que z_n admet une unique primitive de limite nulle en 0. On la note Z_n. Démontrer que $Z_n(1) = \dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{\pi}{4} - z_n(1)\right)$.

Exercice 2. *Bonus*. Déterminer l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x) + 2\displaystyle\int_0^x e^{x-t}f(t)dt$.