DM 04
à rendre le lundi 14 octobre

Exercice 1. *Réciproque de* sh, *de* th *et identités fonctionnelles.*

1. Soit x dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique t dans $\mathbb{R}$ tel que $\text{sh}(t) = x$. On appelle ce réel t l'argument sinus hyperbolique de x et on le note $\text{Argsh}(x)$. La fonction Argsh est ainsi la bijection réciproque de sh.
2. Tracer l'allure du graphe de sh et celui de Argsh.
3. Démontrer que pour tout x réel, Argsh est dérivable en x et que $\text{Argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
4. Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\text{Argsh}(x) \leqslant x \leqslant \text{sh}(x)$.
Il faut en particulier **démontrer** *l'inégalité* $x \leqslant \text{sh}(x)$, *et ne pas dire « par une formule du cours »*
5. Exprimer Argsh à l'aide de fonctions usuelles.

On admet que, de même,

$$\forall x \in]-1,1[,\ \exists! t \in \mathbb{R},\ \text{th}(t) = x.$$

On appelle cet unique antécédent argument tangente hyperbolique et on le note Argth. Ainsi, la fonction Argth est définie sur $]-1,1[$.
On admet aussi que pour tout x dans $]-1,1[$, Argth est dérivable en x et $\text{Argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

On définit sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ les 6 fonctions suivantes :

- $f_1 : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$
- $f_2 : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)$
- $f_3 : x \mapsto \ln\left(\tan(x) + \dfrac{1}{\cos(x)}\right)$
- $f_4 : x \mapsto \text{Argsh}(\tan(x))$
- $f_5 : x \mapsto \text{Argth}(\sin(x))$
- $f_6 : x \mapsto 2\text{Argth}\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$

Le but de cette partie est de montrer que ces fonctions sont égales.

6. Démontrer que f_5 et f_6 sont bien définies sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On admet que f_1, f_2, f_3, f_4 sont bien définies aussi.
7. Montrer que f_1, f_2 et f_3 sont égales.
8. Dériver f_3, f_4, f_5 et f_6 et démontrer que $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = f_6$.

Exercice 2. On définit, lorsque cela a un sens, $f(x) = \dfrac{\text{Arcsin}(x)}{\text{Arccos}(x)}$.

1. Déterminer l'intervalle maximal I de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction f est définie.
2. Calculer $f(-1)$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $f(0)$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
3. Démontrer qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout x de $[-1,1]$, $\text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = C$.
4. Déterminer les variations f sur I.
5. Tracer l'allure de la courbe de f.
6. Résoudre l'équation $f(x) = 2$ d'inconnue x réelle.