MPSI 1

Mathématiques
DS 03 (4H 00)

Samedi 09 novembre – 8h-12h

Avancez avec **courage et noblesse** !

- Pour une candidature hautement considérée, **pensez pour agir** ; puis tâchez d'**aligner de la justesse** pour laisser un sentiment de perfection plutôt que de chercher à en faire le plus en vous discréditant vous-mêmes.
- Prenez **5-10 minutes** pour lire le sujet en entier et décider de la stratégie que vous adopterez.
- Prenez **10 minutes** au moins à la fin des 4 heures pour vous relire !
- Repérez les questions ou parties indépendantes des autres.

La noblesse d'une candidature passe par un écrit **agréable à l'oeil et facile à lire** !

- Le sujet est composé de questions de cours et de deux problèmes indépendants.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- **Aucune couleur** n'est autorisée à l'exception du bleu et du noir.
- Il est demandé de **mettre en évidence** les numéros des questions, les arguments capitaux et les résultats.
- Il est demandé de **numéroter** les écrits **page par page** en bas à gauche.
- Une **chose nommée non définie** par celui qui la nomme annule tout raisonnement se rapportant à cette chose.
- Il est permis d'admettre le résultat d'une question en écrivant "Admis." sur la copie.
- Que le candidat qui trouve ce qui lui semble être une erreur d'énoncé l'indique sur sa copie.
- Une réponse fausse sans calculs intermédiaires est nulle.

Exercice 1. Démontrer que la fonction suivante est inversible en précisant sa fonction réciproque :

$$f : \left| \begin{array}{c} \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \\ (a,b,c) \mapsto (a+b+c, a+ib+jc, a+i^2b+j^2c) \end{array} \right.$$

Où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. (*On ne cherchera pas à exprimer les nombres complexes sous des formes particulières.*)

Problème 1. Autour d'Arctan

A. Généralités et petits calculs

1. Tracer l'allure de la représentation graphique de Arctan dans un repère orthogonal.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Simplifier l'expression $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$. *On demande une justification.*

3. Soient x et y deux réels non nuls.

a. On suppose x et y strictement positifs. Démontrer que

$$\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(y) = \frac{\pi}{2} \iff xy = 1.$$

b. On suppose x et y strictement négatifs. Démontrer que

$$\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(y) = -\frac{\pi}{2} \iff xy = 1.$$

c. Peut-on avoir $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(y) = \pm\frac{\pi}{2}$ si x et y sont de signes différents ?

B. Une identité

4. Démontrer que :

$$(\mathrm{R}) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad xy < 1 \implies \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(y) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

5. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{p=0}^{n} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{1+p+p^2}\right)$.

C. La relation (R) caractérise la fonction Arctan

Dans cette partie, on cherche à démontrer que (R) caractérise la fonction Arctan, c'est-à-dire que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad xy < 1 \implies f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f = \alpha\mathrm{Arctan}$. Soit alors f une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ satisfaisant (R).

6. Calculer $f(0)$, et déterminer l'éventuelle parité ou imparité de f.

7. Démontrer que pour tous x et y dans $\mathbb{R}$ tels que $xy < 1$,

$$f'(x) = \frac{1+y^2}{(1-xy)^2} f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

8. En déduire que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $f'(t) = \dfrac{f'(0)}{1+t^2}$, et conclure.

Problème 2. Opérateurs de composition

Soit E un ensemble non vide. Si $f \in E^E$, on note D_f et G_f les opérateurs de composition à droite et à gauche par f :

$$D_f : \left| \begin{array}{l} E^E \to E^E \\ \varphi \mapsto \varphi \circ f \end{array} \right. \quad \text{et} \quad G_f : \left| \begin{array}{l} E^E \to E^E \\ \varphi \mapsto f \circ \varphi \end{array} \right.$$

On fera bien attention aux objets manipulés. Soit f est une fonction de E dans E.
- Soit φ est une fonction de E dans E. Ainsi, $D_f(\varphi)$ et $G_f(\varphi)$ sont des fonctions de E dans E ; donc si $x \in E$, l'expression $D_f(\varphi)(x)$, égale à $\varphi \circ f(x)$, désigne un élément de E.
- En revanche, D_f et G_f sont des opérateurs (ou fonctions) de E^E dans E^E.

Ce problème est constitué de trois parties : la dernière est largement indépendante des autres.

A. Généralités

1. Démontrer que pour toutes f et g dans E^E, $D_f(g) = G_g(f)$.

2. *Un exemple.* **Dans cette question 2. et dans cette question seulement**, on considère

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{array} \right., \quad g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{et } h : \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor \end{array} \right.$$

Calculer $D_f(g)$, $D_g(f)$, $G_h(f)$, $G_f(h)$.

3. Soient f et g dans E^E.
Démontrer les identités suivantes : $D_f \circ D_g = D_{g \circ f}$, $G_f \circ G_g = G_{f \circ g}$ et $D_f \circ G_g = G_g \circ D_f$.

B. Propriétés d'injectivité, de surjectivité, de bijectivité

Dans cette partie, on fixe $f \in E^E$.

B-I. Injectivité

4. Démontrer que f est injective si et seulement si G_f est injective.
On pourra montrer une double implication et considérer les fonctions constantes.

5. Démontrer que si f est injective, alors il existe φ dans E^E telle que $\varphi \circ f = \mathrm{Id}_E$.
On pourra, en s'aidant d'une figure, définir $\varphi(x)$ selon que $x \in f(E)$ ou $x \notin f(E)$.

6. Démontrer que f est injective si et seulement si D_f est surjective.

B-II. Surjectivité

7. Soient φ et ψ deux fonctions de E dans E. Démontrer l'équivalence suivante

$$\psi(E) \subset \varphi(E) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \theta \in E^E / \quad \psi = \varphi \circ \theta.$$

On admettra l'axiome suivant : si $(P_x)_{x \in E}$ est une famille de parties non vides *de E, alors il existe au moins une fonction $\gamma : E \to E$ telle que $\gamma(x) \in P_x$ pour tout $x \in E$.*

8. Démontrer que si E contient au moins deux éléments, les trois propositions suivantes sont équivalentes entre elles (*toutes les trois vraies ou toutes les trois fausses*) :

(i) f est surjective
(ii) G_f est surjective
(iii) D_f est injective

B-III. Bijectivité

Soit f est une bijection de E sur E. On définit l'opérateur de conjugaison par f :

$$C_f : \left| \begin{array}{l} E^E \to E^E \\ \varphi \mapsto f \circ \varphi \circ f^{-1} \end{array} \right. .$$

9. Montrer que C_f est une bijection de E^E sur E^E et donner sa bijection réciproque.

C. Exemples dans $\mathbb{R}$

Dans toute la fin du problème, on prend $E = \mathbb{R}$. On considère les fonctions suivantes :

$$\sigma : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -x \end{array} \right. \text{ et, pour } a \in \mathbb{R},\ \tau_a : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x + a \end{array} \right. .$$

Si Ψ est un opérateur de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on note $\mathrm{Fix}(\Psi) = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \Psi(f) = f\}$, l'ensemble des points fixes de Ψ.

10. Soient $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $a \in \mathbb{R}$. On se place dans un plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Indiquer les transformations du plan par lesquels on obtient les représentations graphiques de $D_\sigma(f)$, $G_\sigma(f)$, $D_{\tau_a}(f)$ et $G_{\tau_a}(f)$ à partir de celle de f.

11. Déterminer $\mathrm{Fix}(D_\sigma)$, $\mathrm{Fix}(G_\sigma)$, $\mathrm{Fix}(D_\sigma \circ G_\sigma)$, $\mathrm{Fix}(D_{\tau_a})$ (où $a \in]0; +\infty[$).

On cherche enfin dans cette partie à déterminer

$$A = \mathrm{Fix}(D_{\sin}) \cap \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

où $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose $A \neq \emptyset$. Soit $f \in A$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$u_0 = x \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sin(u_n).$$

12. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$. $f(u_n) = f(x)$.

On pose, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \sin(v_n)$.

13. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n \leqslant 1$ et $-v_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_n$.

14. Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, puis qu'elle converge vers 0.

15. Que peut-on en déduire sur f ? Conclure.