Complémént de cours du chapitre 7

On désigne toujours par s et p deux scalaires de $\mathbb{K}$, et par b une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.
But : On veut trouver une fonction de $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ (une seule suffit) qui soit une solution particulière de l'équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants

$$x'' - sx' + px = b(t)$$

ce dans le cas où le second membre b est particulier.

Proposition. (Second membre polynomial)
Si la fonction b est polynomiale non nulle, alors on peut trouver une solution particulière polynomiale de degré :

1. $\deg(b)$ si $p \neq 0$;
2. $\deg(b) + 1$ si $p = 0$ et $s \neq 0$;
3. $\deg(b) + 2$ si $p = 0$ et $s = 0$;

Remarque. Les conditions demandent respectivement que 0 soit racine de multiplicité 0, 1 et 2 de l'équation caractéristique.

Exercice. Donner une solution de chacune des équations différentielles sur $\mathbb{R}$ qui suivent.

1. $x'' + 2x' - 3x = t^2 - 1$.
2. $x'' - x' = 3t^2 - 2t + 1$.
3. $x'' = -t^2$.

Proposition. (Second membre exponentiel)
Si la fonction b est de la forme $t \mapsto e^{\alpha t}A$, où $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $A \in \mathbb{K}^*$, alors on peut trouver $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et une solution particulière de la forme :

1. $t \mapsto e^{\alpha t}\lambda t^0$ si $\alpha^2 - s\alpha + p \neq 0$;
2. $t \mapsto e^{\alpha t}\lambda t^1$ si $\alpha^2 - s\alpha + p = 0$ et $2\alpha - s \neq 0$;
3. $t \mapsto e^{\alpha t}\lambda t^2$ si $\alpha^2 - s\alpha + p = 0$ et $2\alpha - s = 0$.

Remarque. Les conditions demandent respectivement que α soit racine de multiplicité 0, 1 et 2 de l'équation caractéristique.

Exercice. Donner une solution de chacune des équations différentielles sur $\mathbb{R}$ qui suivent.

1. $x'' + x' + x = 5e^{t/2}$.
2. $x'' - 2x' - 3x = e^{-t}$.
3. $x'' - 6x + 9x = -e^{3t}$.

Proposition. (Second membre circulaire, cas réel)
Si $(s, p) \in \mathbb{R}^2$ et la fonction b est de la forme $t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, où $\omega \in \mathbb{R}^*$
et $(A, B) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, alors on peut trouver $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et une solution particulière de la forme :

- $t \mapsto [\lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)]t^0$ si $(s, p) \neq (0, \omega^2)$;
- $t \mapsto [\lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)]t^1$ si $(s, p) = (0, \omega^2)$.

walter.ngambou@ac-versailles.fr

Remarque. Les conditions demandent respectivement que iω soit racine de multiplicité 0 et 1 de l'équation caractéristique (un nombre imaginaire ne pouvant pas être racine double d'une équation du second degré à coefficients réels).

Exercice. Donner une solution de chacune des équations différentielles sur $\mathbb{R}$ qui suivent.

1. $x'' + x' - 2x = \sin(t)$.
2. $x'' + 4x = \sin(2t)$.
3. $4x'' + x = 5\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$.