

Programme de colles de mathématiques

Semaine du lundi 18 novembre 2024

Lycée Pasteur, MPSII

Walter Ngambou

Thèmes

- *Intégration d'une fonction continue sur un segment.* (1) Définition par les primitives dont on admet ici l'existence en général (fonction complexe d'une variable réelle), et interprétation par les aires algébriques (fonction réelle d'une variable réelle). (2) Propriétés des opérations sur les fonctions dérivées : combinaisons linéaires, produit, quotient, composée et réciproque. (3) Propriétés de la somme intégrale : relation de Chasles ; linéarité, partie réelle et partie imaginaire ; positivité et croissance (fonction réelle) ; inégalité triangulaire étendue (somme intégrale et valeur absolue/module). (4) Intégration par parties comme pseudo-inversion de la dérivation d'un produit. (5) Intégration par changement de variable comme pseudo-inversion de la dérivation d'une composée. (6) Fonction fixe et bornes variables : dérivation. (6) Table de primitives comprenant des primitives de $x \mapsto \tan x$, $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \frac{1}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, sur tout intervalle de leurs domaines respectifs de dérivabilité.
- *Equations différentielles (ED's).* (1) ED's à primitives : $x' = a(t)$. (2) ED's d'ordre 1 de la forme $x' - a(t)x = b(t)$ et problème de Cauchy : (a) méthode directe ; (b) méthode détournée : structure, variation de la constante et superposition. (3) ED's d'ordre 2 de la forme $x'' - sx' + px = b(t)$ et problème de Cauchy (admis pour l'ordre 2) : structure et superposition ; résolution explicite seulement avec b polynomiale, exponentielle ou circulaire. Vocabulaire non exigible : les qualificatifs "ordinaire", "scalaire" et "normalisée".

Exercices traités

1. Les primitives de $x \mapsto \frac{x-\alpha}{((x-\alpha)^2 + \beta^2)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ($n = 1$ ou $n \in \llbracket 2, n \rrbracket$).
2. Relation de récurrence entre les fonctions $F_n : x \mapsto \int_{\alpha}^x \frac{1}{((t-\alpha)^2 + \beta^2)^n} dt$ pour $n \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
Application : les primitives de $x \mapsto \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2}$.
3. Les primitives de $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ sur tout intervalle de son domaine de dérivabilité.
4. Définition et représentation graphique de $x \mapsto \int_0^1 \max(x, t) dt$.
5. L'intégrale de Wallis : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$, où $n \in \mathbb{N}$. Formule explicite et comportement asymptotique (DM).
6. Conjecture et démonstration de la formule de dérivation de Leibniz.
7. L'ED $x' + \tan(t)x = -\sin(t)$ sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$; et d'autres d'ordre 1.
8. L'ED $x'' + 2x' - 3x = \sin(2x)$ sur \mathbb{R} ; et d'autres d'ordre 2 à coefficients constants.
9. L'ED non linéaire et à intervalle inconnue $x' = 1 + x^2$ d'inconnue (I, x) avec I intervalle ouvert de \mathbb{R} et $x \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$.