N. Laillet - W. Ngambou
walter.ngambou@ac-versailles.fr

TD 5
Applications, relations

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. *Quelques exemples.* ●○○

1. Déterminer l'image de $]-1,3]$ et l'image réciproque de $[-1,2]$ par l'application $x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$. On ne demande pas de justification.

   Correction 1. On étudie la fonction $f : x \mapsto x^2+x+1$, dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto 2x+1$, s'annulant en $-\frac{1}{2}$. Donc f est décroissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Or, $f(]-1,3]) = f\left(\left]-1,-\frac{1}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}, 3\right]\right) = f\left(\left]-1,-\frac{1}{2}\right]\right) \cup f\left(\left[-\frac{1}{2}, 3\right]\right)$ (cette égalité est démontrée dans l'exercice 5). Par continuité et stricte monotonie de f sur $\left]-1,-\frac{1}{2}\right]$ (i.e. par le TVI strictement monotone), on obtient $f\left(\left]-1,-\frac{1}{2}\right]\right) = \left[\frac{3}{4}, 1\right[$. De même, $f\left(\left[-\frac{1}{2}, 3\right]\right) = \left[\frac{3}{4}, 13\right]$. Donc $f(]-1,3]) = \left[\frac{3}{4}, 13\right]$.

2. Soit $f = \sin$, $\mathrm{I} = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Déterminer $f(f^{-1}(\mathrm{I}))$.

3. Soit g l'application exponentielle de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Déterminer $g^{-1}\left(g\left(\left\{0, i\frac{\pi}{2}\right\}\right)\right)$.

Exercice 2. *Images, images réciproques.* ●◐○ Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application, A, A' des parties de E, B, B' des parties de F. Comparer les ensembles suivants (y a-t-il inclusion ? inclusion réciproque ? égalité ?) Dans les cas où il n'y a pas, en général, égalité, exhiber un contre-exemple.

1. $f^{-1}(f(A))$ et A.

   Correction 2. Cours : on a $A \subset f^{-1}(f(A))$.

2. $f(f^{-1}(B))$ et B.

   Correction 3. Cours : on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

3. $f(A \cap A')$ et $f(A) \cap f(A')$.

   Correction 4. On montre qu'on a l'inclusion directe.
   Soit $y \in f(A \cap A')$. Alors on dispose de x dans $A \cap A'$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A$ et $x \in A'$, $f(x) \in f(A)$ et $f(x) \in f(A')$ donc $f(x) \in f(A) \cap f(A')$ donc $y \in f(A) \cap f(A')$. D'où l'inclusion directe.
   L'inclusion réciproque est fausse en général : on prend $f : x \mapsto x^2$, $A = [-2,-1]$ et $A' = [1,2]$. On sait que $A \cap A' = \emptyset$ donc $f(A \cap A') = \emptyset$, mais $f(A) \cap f(A') = [1,4] \cap [1,4] = [1,4]$. Donc on a l'inclusion directe, mais pas réciproque.

4. $f(A \cup A')$ et $f(A) \cup f(A')$.

Correction 5. On montre qu'il y a égalité.

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in f(A \cup A')$. Alors on dispose de $x \in A \cup A$ tel que $y = f(x)$. Si $x \in A$, alors $y \in f(A) \subset f(A) \cup f(A')$. Si $x \in A'$, alors $y \in f(A') \subset f(A) \cup f(A')$. Dans tous les cas $y \in f(A) \cup f(A')$. D'où l'inclusion directe.

$\boxed{\supset}$ Soit $y \in f(A) \cup f(A')$. Si $y \in f(A)$, on dispose de x dans A tel que $y = f(x)$. Donc $x \in A \cup A'$ donc $y \in f(A \cup A')$. De même si $y \in f(A')$. D'où l'inclusion réciproque.

D'où l'égalité !

5. $f^{-1}(B \cap B')$ et $f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.

Correction 6. On montre qu'il y a égalité. Soit $x \in E$. Alors

$$x \in f^{-1}(B \cap B') \Leftrightarrow f(x) \in B \cap B' \Leftrightarrow f(x) \in B \text{ et } f(x) \in B' \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$$

6. $f^{-1}(B \cup B')$ et $f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.

Correction 7. On montre qu'il y a égalité. On montre qu'il y a égalité. Soit $x \in E$. Alors

$$x \in f^{-1}(B \cup B') \Leftrightarrow f(x) \in B \cup B' \Leftrightarrow f(x) \in B \text{ ou } f(x) \in B' \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$$

Exercice 3. ●●● Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\forall A \subset E,\ f^{-1}(f(A)) = A$.

Correction 8. On montre que $\forall A \subset E,\ f^{-1}(f(A)) = A$ si et seulement si f est injective.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $\forall A \subset E,\ f^{-1}(f(A)) = A$. Montrons que f est injective. **SOIENT** x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$.
Il faut passer des ensembles en éléments !
Alors $f(\{x\}) = f(\{x'\})$.
Donc $f^{-1}(f(\{x\})) = f^{-1}(f(\{x'\}))$.
Donc, par hypothèse, $\{x\} = \{x'\}$. Donc $x = x'$.
Donc f est injective.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons f injective, et montrons que $\forall A \subset E,\ f^{-1}(f(A)) = A$. Soit $A \subset E$. On sait déjà que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Montrons l'inclusion réciproque, i.e. $f^{-1}(f(A)) \subset A$. **Soit** x dans $f^{-1}(f(A))$. Alors $f(x) \in f(A)$, i.e. on dispose de $x' \in A$, $f(x) = f(x')$. Par injectivité de f, $x = x'$. Donc $x \in A$. D'où l'inclusion réciproque et l'égalité !

2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\forall B \subset F,\ f(f^{-1}(B)) = B$.

Correction 9. On montre que $\forall B \subset F,\ f(f^{-1}(B)) = B$ si et seulement si f est surjective.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $\forall B \subset F,\ f(f^{-1}(B)) = B$. Montrons que f est surjective. Soit y dans B. On sait que $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$. En particulier, cela signifie que $f^{-1}(\{y\})$ n'est pas vide. Posons x un élément de $f^{-1}(\{y\})$. Alors $f(x) \in \{y\}$. Donc $f(x) = y$. Donc f est surjective.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons f surjective. Soit $B \subset F$. Montrons que $f(f^{-1}(B)) = B$. On sait par le cours que l'inclusion directe est vraie. Montrons l'inclusion réciproque. **Soit** y dans B. Par surjectivité de f, on dispose de x dans E telle que $f(x) = y$. Donc $x \in f^{-1}(B)$. Donc $f(x) \in f(f^{-1}(B))$ donc $y \in f(f^{-1}(B))$. D'où l'inclusion réciproque. D'où l'implication réciproque !

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\forall (A, A') \in \mathcal{P}(E)^2,\ f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

Exercice 4. ●●○ Soient E un ensemble et $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si, et seulement si, f est surjective.

Correction 10. Il s'agit de montrer une équivalence, faisons-le par double implication.
Si f est injective, montrons qu'elle est surjective.
Soit y dans E. Alors $f \circ f \circ f(y) = f(y)$, i.e.

$$f(f \circ f(y)) = f(y).$$

Par injectivité de f, $f \circ f(y) = y$, donc $f(y)$ est un antécédent de y par f. Donc f est surjective.
Si f est surjective, montrons qu'elle est injective.
Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$. f est surjective, on dispose donc de z et z' tels que $x = f(z)$ et $x' = f(z')$. Alors

$$f \circ f(z) = f \circ f(z'),$$

a fortiori

$$f \circ f \circ f(z) = f \circ f \circ f(z'),$$

soit

$$f(z) = f(z'),$$

d'où $x = x'$. Donc f est injective.

Exercice 5. ●●● On veut montrer qu'il n'existe pas de surjection d'un ensemble dans l'ensemble de ses parties.

1. Pourquoi est-ce évident dans le cas d'un ensemble fini ?

Correction 11. Si E est un ensemble fini, alors $\mathcal{P}(E)$ possède $2^{|E|}$ éléments, toujours strictement supérieur à $|E|$, donc il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$.

2. Soit E un ensemble, $f : E \to \mathcal{P}(E)$. On pose

$$A = \{x \in E,\ x \notin f(x)\}.$$

Montrer que A n'a pas d'antécédent par f et conclure.

Correction 12. Raisonnons par l'absurde.
Supposons que A ait un antécédent par f, nommons-le a.
Si $a \in A$, alors, comme $A = f(a)$, on a $a \in f(a)$, absurde.
Si $a \notin A$, alors, comme $A = f(a)$, on a $a \notin f(a)$, donc $a \in A$, absurde.
Donc A n'a pas d'antécédent par a.
Remarque : ce genre de raisonnement est associé au paradoxe dit du barbier.

> (extrait wikipedia)
> Le conseil municipal d'un village arrête une ordonnance qui enjoint à son barbier (masculin) de raser tous les habitants masculins du village qui ne se rasent pas eux-mêmes et seulement ceux-ci.
> Le barbier, qui est bien un habitant du village, n'a pas pu respecter cette règle car :
>
> (a) S'il se rase lui-même, il enfreint la règle, car le barbier ne peut raser que les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes ;
>
> (b) S'il ne se rase pas lui-même - qu'il se fasse raser ou qu'il conserve la barbe - il est en tort également, car il a la charge de raser les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes.
>
> Cette règle est donc inapplicable.

Ce n'est pas un paradoxe, c'est juste qu'on a supposé l'existence d'un objet qui n'existait pas ! Nous sommes dans le cadre de l'exercice avec f l'application qui à un homme associe **l'ensemble des personnes rasées par cet homme.** L'ensemble A est donc l'ensemble des hommes h qui n'appartiennent pas à $f(h)$, donc qui ne se rasent pas eux-mêmes.

Exercice 6. ●○○ Soit $\mathcal{R}$, la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x.\mathrm{e}^{-y} = y.\mathrm{e}^{-x}$. Montrer que $\mathcal{R}$ est bien une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ et préciser, selon les valeurs de x, le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de x.

Correction 13. Posons f la fonction définie pour tout t de $\mathbb{R}$ par $f(t) = t\mathrm{e}^{t}$. ALors pour tous x et y dans $\mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $f(x) = f(y)$. On montre que cette relation est une relation d'équivalence.

- Réflexivité. Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors $f(x) = f(x)$ donc $x\mathcal{R}x$.
- Symétrie. Soient x et y dans $\mathbb{R}$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors $f(y) = f(x)$ donc $y\mathcal{R}x$.
- Soient x, y et z dans $\mathbb{R}$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Alors $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$. Donc $f(x) = f(z)$ donc $x\mathcal{R}z$.

Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
Pour les classes d'équivalence, on étudie la fonction f. J'en done le graphe et la réponse finale :

TD5-ill1.pdf

La fonction est décroissante avec un minimum en -1. On conclut que

- si $x \geqslant 0$ ou $x = -1$, $\overline{x}$ n'a qu'un élément : $\overline{x} = \{x\}$.
- sinon, $\overline{x}$ a deux éléments.

Exercice 7. ●●○ On considère $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \subset)$. Soit

$$E = \left\{ \left[-\frac{1}{n}, n \right], n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

L'ensemble E possède-t-il un plus grand élément ? Possède-t-il un majorant ?

Correction 14. Montrons que E ne possède pas de plus grand élément. Supposons qu'il en possède un. Alors on aurait un n_0 entier tel que

$$\forall A \in E, A \subset \left[-\frac{1}{n_0}, n_0 \right].$$

En particulier,

$$[-1, 1] \subset \left[-\frac{1}{n_0}, n_0 \right].$$

Donc, nécessairement, $n_0 = 1$ car $\forall k > 1, -1 < \dfrac{-1}{n_0}$. Mais $\left[-\dfrac{1}{2}, 2 \right]$ n'est pas inclus dans $[-1, 1]$, contradiction.
En revanche, E possède des majorants. $\mathbb{R}$ par exemple.

Stratégie Les exercices corrigés en classe sont fondamentaux (je ne le répèterai jamais assez). Dans ce TD, **ne sautez pas de questions sans les avoir rédigées**. Ensuite, il faut faire

- des exercices sur les applications : faire par exemple l'exercice 9. Ensuite faire l'exercice 11 pour manipuler des images de fonctions. Enfin, faire le 13, **fondamental**.
- un peu d'exercices sur les relations : l'exercice 20 (1.) et le début du problème 25.
- pour aller plus loin, des exercices très intéressants comme le 14, le 15 ou le 25

2 Applications

Exercice 8. *Un exemple arithmétique*. ●●○ Soit φ l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\varphi(n)$ est le reste de la division euclidienne de n par 3.

1. La fonction φ est-elle injective ?

Correction 15. Non ! En effet, $\varphi(3) = 0 = \varphi(0)$ mais $3 = 0$.

2. Déterminer $\varphi^{-1}(\{1\})$.

Correction 16. $\varphi^{-1}(1) = \{n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) = 1\} = \{3k+1,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Soit ψ l'application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ \psi(n, m) = 2^n 3^m.$$

3. Démontrer que ψ est injective.

Correction 17. Soient (n, m) et (n', m') dans $\mathbb{N}^2$ tels que $\psi(n, m) = \psi(n', m')$. Alors $2^n 3^m = 2^{n'} 3^{m'}$. Alors, si $n \neq n'$, on peut supposer $n' > n$. Donc $3^m = 2^{n'-n} 3^{m'}$. Or, 2 divise $2^{n'-n} 3^{m'}$ donc 2 divise 3^m, absurde ! Donc $n = n'$ et $m = m'$. Donc ψ est injective.

4. ψ est-elle surjective ?

Correction 18. ψ n'est en revanche pas surjective car, par exemple 5 n'a pas d'antécédent.

Exercice 9. *Deux exemples complexes*. ●●○

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, et φ_θ l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_\theta(n) = (\mathrm{e}^{i\theta})^n.$$

Démontrer que φ_θ n'est pas injective si, et seulement si $\dfrac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$.

Correction 19. Supposons que $\dfrac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$ et montrons que φ_θ n'est pas injective.
$\dfrac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$ donc on dispose de p et q deux entiers tels que $\theta = 2\pi \dfrac{p}{q}$. **Posons** $n = 0$ et $m = 2q$. Alors $n \neq m$, mais $\varphi_\theta(n) = 1$ et $\varphi_\theta(m) = \mathrm{e}^{2iq\pi} = 1$. Donc φ_θ n'est pas injective.
Supposons que φ_θ n'est pas injective. Donc on dispose de n et m dans $\mathbb{N}$ tels que $n \neq m$ et $\varphi_\theta(n) = \varphi_\theta(m)$, i.e.

$$\mathrm{e}^{in\theta} = \mathrm{e}^{im\theta}.$$

Donc on dispose de p dans $\mathbb{Z}$ tel que $n\theta = m\theta + 2p\pi$. Donc

$$\theta = \frac{2p\pi}{n-m},$$

i.e. $\dfrac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$. D'où l'implication réciproque et l'équivalence.

N. Laillet - W. Ngambou
walter.ngambou@ac-versailles.fr

2. Soient P le demi-plan complexe $\{x \in \mathbb{C}, \mathfrak{Im}(z) > 0\}$ et D le disque unité ouvert $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. Soit φ l'application de $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{-i\},\ \varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

Montrer que φ réalise une bijection de P sur D.

Correction 20. Montrons déjà que $\varphi(P) \subset D$.
Soit z dans $\varphi(P)$. Alors on dispose de $x \in P$ tel que $z = \varphi(x)$. Alors

$$z = \frac{x-i}{x+i}.$$

Écrivons $x = a + ib$, avec a réel et $b > 0$. Alors

$$\begin{aligned}|z|^2 &= \frac{|x-i|^2}{|x+i|^2}\\ &= \frac{a^2+(b-1)^2}{a^2+(b+1)^2}\\ &= \frac{a^2+b^2+1-2b}{a^2+b^2+1+2b}.\end{aligned}$$

Or, comme $b > 0$, $a^2 + b^2 + 1 - 2b < a^2 + b^2 + 1 + 2b$. Étant donné que $a^2 + b^2 + 1 - 2b > 0$, on en déduit que $\dfrac{a^2+b^2+1-2b}{a^2+b^2+1+2b} < 1$, donc que $|z|^2 < 1$, donc que $z \in D$.
Donc $\varphi(P) \subset D$.
Soit maintenant z un complexe de D, résolvons l'équation en x : $\varphi(x) = z$. L'équation s'écrit

$$z = \frac{x-i}{x+i},$$

donc $z(x+i) = x - i$, soit

$$x(z-1) = -iz - i,$$

ou encore, puisque $z \neq 1$ ($|z| < 1$),

$$x = \frac{-iz-i}{z-1} = i\frac{1+z}{1-z}.$$

L'unicité de la solution assure l'injectivité de φ. Vérifions maintenant que le x trouvé est bien dans P. Écrivons $z = \alpha + i\beta$. Alors

$$\begin{aligned}x &= i\frac{1+\alpha+i\beta}{1-\alpha-i\beta}\\ &= i\frac{(1+\alpha+i\beta)(1-\alpha+i\beta)}{(1-\alpha)^2+\beta^2)}\\ &= i\frac{1-\alpha^2-\beta^2+2i\beta}{(1-\alpha)^2+\beta^2)}\\ &= -\frac{2\beta}{(1-\alpha)^2+\beta^2)} + i\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{(1-\alpha)^2+\beta^2)}.\end{aligned}$$

Or, $1 - \alpha^2 - \beta^2 > 0$ car $z \in D$, doc $\mathfrak{Im}(x) > 0$. D'où le résultat.

Exercice 10. *Applications linéaires*. ●◐○

1. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

(a) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (2x+y, y-x) \end{cases}$

(b) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x+y \end{cases}$

(c) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \mapsto (x+2y, y-x, x+y) \end{cases}$

(d) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (x+y+z, y-x+2z, 2y+3z) \end{cases}$

Correction 21. On résout le premier exemple :

- **Injectivité.** Soient (x,y) et (x',y') tels que $f(x,y) = f(x',y')$. Alors
$$\begin{cases} 2x+y = 2x'+y' \\ y-x = y'-x' \end{cases}$$
On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et on obtient $\begin{cases} 2x+y = 2x'+y' \\ -3x = -3x' \end{cases}$, donc $x = x'$, et donc $y = y'$ dans la première équation. Donc f est injective !
- **Surjectivité.** Soit (a,b) dans $\mathbb{R}^2$. On cherche (x,y) dans $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y) = (a,b)$, i.e.
$$\begin{cases} 2x+y = a \\ y-x = b \end{cases}$$
On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et on obtient $\begin{cases} 2x+y = a \\ -3x = b-a \end{cases}$. Donc $x = \dfrac{a-b}{3}$ et donc $y = a - 2x = \dfrac{a-2b}{3}$. Donc f est surjective.
- Donc f est bijective.

Remarque : en fait il suffit de résoudre le second système, et de regarder si on a au moins/au plus/exactement une solution.
Résoudre à chaque fois un système linéaire inhomogène, comme fait pour le premier exemple. La première application est bijective, la seconde surjective non injective, la troisième injective non surjective et la quatrième ni l'une ni l'autre.

Exercice 11. ●◐○ Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application, A une partie de E et B une partie de F. Montrer, en s'inspirant de la preuve du cours, que
$$f(f^{-1}(f(A))) = f(A).$$
et que
$$f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B).$$

Correction 22. Soyons **formels** !

- Pour la première égalité, on procède par double inclusion.
  - $\boxed{\subset}$ **Soit** y dans $f(f^{-1}(f(A)))$. Alors **on dispose de** x dans $f^{-1}(f(A))$ tel que $y = f(x)$. Mais $x \in f^{-1}(f(A))$ donc $f(x) \in f(A)$. Donc $y = f(x) \in f(A)$. Donc $f(f^{-1}(f(A))) \subset f(A)$.
  - $\boxed{\supset}$ **Soit** y dans $f(A)$. Alors on dispose de x dans A tel que $y = f(x)$. Mais alors $x \in f^{-1}(f(A))$. Donc $y = f(x) = f(f^{-1}(f(A)))$, d'où l'inclusion réciproque.

  D'où l'égalité désirée.
- Pour la seconde égalité, on fait de même.

walter.ngambou@ac-versailles.fr

$\boxed{\subset}$ **Soit** x dans $f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$. Alors $f(x) \in f(f^{-1}(B))$ donc on dispose de z dans $f^{-1}(B)$ tel que $f(x) = f(z)$. Or $z \in f^{-1}(B)$ donc $f(z) \in B$ donc $f(x) \in B$ donc $x \in f^{-1}(B)$. D'où l'inclusion directe.

$\boxed{\supset}$ **Soit** x dans $f^{-1}(B)$. Alors $f(x) \inf(f^{-1}(B))$. Donc $x \in f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$. D'où l'inclusion réciproque.

D'où l'égalité désirée.

Exercice 12. ●◐○ Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. On suppose $g \circ f$ injective. Montrer que f est injective.

   Correction 23. Cours

2. On suppose $g \circ f$ surjective. Montrer que g est surjective.

   Correction 24. Cours

3. Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = 2n,$$
$$\forall k \in \mathbb{N}, g(2k) = k, \;\; g(2k+1) = 0.$$

   Montrer que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. A-t-on pour autant g et f bijectives ?

   Correction 25. Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors $g \circ f(n) = g(f(n)) = g(2n) = n$. Donc $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. DOnc $g \circ f$ est injective, **MAIS** g n'est pas injective ! (1 et 3 ont la même image)
   De même, $g \circ f$ est surjective, **MAIS** f n'est pas surjective (1 n'a pas d'antécédent).
   Autrement dit, pour vérifier qu'une application est bijective, il faut vraiment calculer $f \circ g$ **et** $g \circ f$.

Exercice 13. ●◐○ Soit $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f = f$. Montrer que si f est injective ou surjective, alors $f = \mathrm{Id}_E$.

Correction 26.

- **Supposons** f injective. Soit x dans E. Alors $f \circ f(x) = f(x)$ i.e. $f(f(x)) = f(x)$. Donc, par injectivité de f, $f(x) = x$. Donc $f = \mathrm{Id}_E$.
- **Supposons** f surjective. Soit x dans E. Par surjectivité de f, on dispose de a dans E tel que $x = f(a)$. Or, $f \circ f(a) = f(a)$, i.e. $f(x) = x$. Donc $f = \mathrm{Id}_E$.

Dans les deux cas on a démontré que $f = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 14. ●●○ Soit E un ensemble, A et B deux parties de E.

1. À quelle CNS sur A l'application $\varphi_A : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & X \cap A \end{array} \right.$ est-elle injective ? Surjective ?
2. À quelle CNS sur A l'application $\psi_A : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & X \cup A \end{array} \right.$ est-elle injective ? Surjective ?
3. À quelle CNS sur A et B l'application $\theta_{A,B} : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right.$ est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 15. ●●○ Soit E un ensemble non vide et a un élément de E.

On définit des ensembles F, M et N et une application g de la façon suivante :

- $F = E \setminus \{a\}$;
- $M = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid a \in X\}$;
- $N = \mathcal{P}(F)$;
- $g : \left| \begin{array}{l} M \to \mathcal{P}(E) \\ X \mapsto X \cap F \end{array} \right.$

1. Montrer que M et N sont non vides et constituent une partition de $\mathcal{P}(E)$ (c'est-à-dire que $M \cap N = \emptyset$ et que $M \cup N = \mathcal{P}(E)$).

Correction 27. Supposons que $M \cap N \neq \emptyset$. Alors on dispose de $X \in M \cap N$, i.e. de $X|in\mathcal{P}(E)$ tel que $s \in X$ et que $X \in \mathcal{P}(F)$, i.e. $a \in X$ et $X \in \mathbb{E} \setminus \{a\}$, absurde. Donc $M \cap N = \emptyset$.
Ensuite, soit $X \in \mathcal{P}(E)$. Ou bien $a \in X$. ALors $X \in M$. Ou bien $a \notin X$. Donc $X \subset \mathbb{E} \setminus \{a\}$. Donc $X \subset F$ donc $X \in \mathcal{P}(F) = N$. Donc $\mathcal{P}(E) \subset M \cup N$. L'inclusion réciproque étant évidente, on a l'égalité.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subset N$.

Correction 28. Soit $Y \in \mathrm{Im}(g)$. Alors on dispose de $X \in M$ tel que $Y = g(X) = X \cap F = X \cap (E \setminus \{a\})$. Donc $a \notin Y$. Donc $Y \subset N$. D'où le résultat.

3. Démontrer que g est une bijection de M sur N et donner une expression de sa bijection réciproque.

Correction 29. Pour trouver la bijection réciproque, on peut faire une analyse-synthèse. **Soit** Y dans N.
Analyse. On suppose qu'il existe X dans M tel que $g(X) = Y$. Déjà, $X \cap F = Y$ donc $X \setminus \{a\} = Y$.
Ensuite $X \in M$, donc $a \in X$, donc $X = X \setminus \{a\} \cup \{a\} = Y \cup \{a\}$.
Synthèse. $Y \cup \{a\}$ est clairement solution !
D'où la bijectivité de g et $g^{-1} : Y \mapsto Y \cup \{a\}$.

4. Soit h l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ définie comme suit :
Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, $h(X) = g(X)$ si $X \in M$ et $h(X) = g^{-1}(X)$ si $X \in N$.
Montrer que h est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur $\mathcal{P}(E)$.

Correction 30. Remarquons que h envoie les éléments de M sur N et réciproquement.
Montrons que h est injective. Soient X et X' tels que $h(X) = h(X')$. Si $h(X) \in M$, nécessairement $X \in N$, et $X' \in N$ et l'égalité $h(X) = h(X')$ s'écrit $g^{-1}(X) = g^{-1}(X')$, donc $X = X'$. On fait de même dans l'autre cas, d'où l'injectivité.
h est surjective : si $Y \in \mathbb{P}(E)$:

- si $Y \in N$, alors on pose $X = g^{-1}(Y) \in M$. ALors $g(X) = g(g^{-1}(Y)) = Y$.
- de même si $Y \in M$.

5. En déduire que, dans tout ensemble fini non vide, il y a autant de parties ayant un nombre pair d'éléments que de parties ayant un nombre impair d'éléments.

Correction 31. En posant ce qui est indiqué, on remarque que h ajoute ou retire un élément, i.e. change la parité du nombre d'éléments.

Exercice 16. ●●○ Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissantes telles que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Correction 32. Raisonnons par analyse-synthèse.
Analyse. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante, telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_\mathbb{R}$. Soit x un réel. Alors

- Si $x \leqslant f(x)$, alors, par croissance de f, $f(x) \leqslant f(f(x))$, i.e. $f(x) \leqslant x$, donc $f(x) = x$.
- Si $f(x) \leqslant x$, alors, par croissance de f, $f(f(x)) \leqslant f(x)$, i.e. $x \leqslant f(x)$, donc $f(x) = x$.

Donc nécessairement $f = \mathrm{Id}_\mathbb{R}$.
Synthèse. Bien évidemment, $f = \mathrm{Id}_\mathbb{R}$ fonctionne.

Exercice 17. ●●○ Déterminer toutes les injections $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tout entier naturel $f(n) \leqslant n$.

Correction 33. Analyse. Soit f une telle injection. Alors montrons par récurrence que pour tout entier naturel k, $\mathcal{P}_k : \forall j \leqslant k, f(j) = j$ est vraie.
Initialisation. $f(0) \in \mathbb{N}$ et $f(0) \leqslant 0$, donc $f(0) = 0$.
Hérédité. Supposons que pour un certain k, on ait

$$\forall j \leqslant k,\ f(j) = j.$$

On a alors $f(k+1) \leqslant k+1$ et, par injectivité de f, $f(k+1) \neq f(j)$ pour tout $j \leqslant k$. Donc $f(k+1) = k+1$.
Conclusion. Héréditaire et vraie au rang 0, la proposition est vraie pour tout k en vertu du principe de récurrence.

Exercice 18. *Sur les applications de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$. ●●○

1. Existe-t-il une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui soit strictement décroissante ?

   Correction 34. La réponse est non, raisonnons par l'absurde ! Posons $f(0) = a$. Par stricte décroissance de f, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f(n+1) < f(n)$ donc par récurrence immédiate, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $f(k) \leqslant a - k$. Mais alors $f(a+1) \leqslant -1$, absurde car f est à valeurs dans $\mathbb{N}$!

2. Existe-t-il une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui ne soit pas croissante ?

   Correction 35. Oui ! il suffit de poser $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et pour tout $n \geqslant 2$, $f(n) = n$. Ou pire, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f(2n) = 2n+1$ et $f(2n+1) = f(2n)$.

3. (●●●)Que dire de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de $f(n)$, où f est une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

   Correction 36. On montre que c'est $+\infty$, en définissant la notion de limite. Soit $M > 0$. Posons $m = \lfloor M \rfloor$. Posons $A = f^{-1}([\![0, m]\!])$. Par injectivité de f, A est fini. Soit $N = \max(A)$. Alors $\forall n \geqslant N+1$, $f(n) > m \geqslant M$. Donc $f(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3 Relations

Exercice 19. ●○○ On considère dans le plan $\mathbb{R}^2$ rapporté à une origine O la relation binaire définie par $M\mathcal{R}N$ si et seulement si O, M et N sont alignés. Est-ce une relation d'équivalence ?

Correction 37. Pas de correction détaillée pour cet exercice : la relation n'est pas une relation d'équivalence, on contredit la transivité en prenant un point confondu avec l'origine. En revance, sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, la relation est une relation d'équivalence.

Exercice 20. ●○○ On définit sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ la relation binaire $\sim$ par

$$[(p, q) \sim (p', q')] \Leftrightarrow pq' = p'q.$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Correction 38.
- Réflexivité. Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Alors $pq = pq$ donc $(p, q) \sim (p, q)$.
- Symétrie. Soient (p, q) et (p', q') dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, tels que $(p, q) \sim (p', q')$. Donc $pq' = p'q$ donc $p'q = pq'$ donc $(p', q') \sim (p, q)$. D'où la symétrie.
- Transitivité. Soient (p, q), (p', q') et (p'', q'') dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, tels que $(p, q) \sim (p', q')$ et $(p', q') \sim (p'', q'')$. ALors $pq' = p'q$ et $p'q'' = p''q'$. Donc $pq'q'' = p'qq'' - q''q'q$ donc, comme $q \neq 0$, $pq'' = p''q$. D'où la transitivité (remarquez que je suis resté dans les entiers naturels !)

La relation est donc une relation d'équivalence.

2. ●●◐ À quoi correspond l'ensemble quotient $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* / \sim$?

Correction 39. Il s'agit de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels !

Exercice 21. ●●◐ Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées. On pose $A + B = \{x + y,\ x \in A,\ y \in B\}$. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Correction 40. Montrons une double inégalité.
Déjà, montrons que $\sup(A+B) \leqslant \sup(A)+\sup(B)$. **Soit** x dans $A+B$. Alors on dispose de a dans A et b dans B tels que $x = a+b$. Donc $x \leqslant \sup(A)+\sup(B)$. Donc $\sup(A)+\sup(B)$ est un majorant de $A+B$. Comme $\sup(A+B)$ est le plus petit des majorants de $A+B$, $\sup(A+B) \leqslant \sup(A)+\sup(B)$.
Montrons maintenant que $\sup(A)+\sup(B) \leqslant \sup(A+B)$. La technique est **bien plus délicate.** Soit a dans A. Alors si b est dans B, $a + b \in A + B$. Donc $a = a + b - b \leqslant \sup(A + B) - b$. Donc $\sup(A + B) - b$ est un majorant de A, donc $\sup(A) \leqslant \sup(A + B) - b$ (car c'est le plus petit des majorants). Donc $b \leqslant \sup(A + B) - \sup(A)$. Donc $\sup(A + B) - \sup(A)$ est un majorant de B, donc $\sup(B) \leqslant \sup(A + B) - \sup(B)$. Donc $\sup(A) + \sup(B) \leqslant \sup(A + B)$.

Exercice 22. ●●○ Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Combien peut-on définir de relations binaires sur E ?

Correction 41. Une relation binaire se décrit entièrement par une table de composition, avec une double entrée : si $a_1, \dots, a_n$ sont les éléments de E, on remplit la case (i, j) avec 0 si les éléments ne sont pas en relation, 1 si c'est le cas. On peut donc définir 2^{n^2} relations binaires.

2. Combien sont réflexives ?

Correction 42. Une relation réflexive est une relation pour laquelle pour tout x, $s\mathcal{R}x$. Elle se code en imposant la diagonale à 1. D'où 2^{n^2-n} possibilités.

3. Combien sont symétriques ?

Correction 43. Une relation symétrique revient à prendre une table symétrique, d'où $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ possibilités.

 walter.ngambou@ac-versailles.fr

Exercice 23. ●●◐ Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné non vide. On suppose que toute partie non vide de E admet une borne supérieure et une borne inférieure.
Soit $f : E \to E$ une application croissante.
On pose $A = \{x \in E,\ x \preceq f(x)\}$. Montrer que A est non vide, admet une borne supérieure a et que $a = f(a)$.

Correction 44. Montrons que A n'est pas vide. E est non vide, donc admet une borne inférieure m. Donc $m \leqslant y$ pour tout y de E, en particulier pour $y = f(m)$. Donc $m \leqslant f(m)$ et $m \in A$.
Par définition de E, A admet une borne supérieure a.
Montrons que $a = f(a)$.
Déjà pour tout x de A, $x \leqslant a$, donc, par croissance de f, $f(x) \leqslant f(a)$. Donc, par définition de A, $x \leqslant f(x) \leqslant f(a)$. Donc $f(a)$ est un majorant de A. Par définition de la borne supérieure, $a \leqslant f(a)$.
Maintenant, par croissance de f, $f(a) \leqslant f(f(a))$. Donc $f(a) \in A$. Donc, comme $a = \sup(A)$, $a \geqslant f(a)$.
Donc $f(a) = a$.

Exercice 24. *Comment rendre une application injective ?*. ●●● Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$.

1. On définit la relation $\sim$ par $(x \sim y) \Leftrightarrow (f(x) = f(y))$. Montrer que cette relation est relation d'équivalence.
2. Décrire les classes d'équivalence sous $\sim$. Comment traduire en termes de classes d'équivalence la propriété « f est injective » .
3. Sur $E/\sim$, on définit l'application $\overline{f}$ comme suit :
$$\overline{f} : \begin{cases} E/\sim\ \to F \\ \quad \overline{x} \mapsto \overline{f}(\overline{x}) = f(x) \end{cases}$$
Montrer que $\overline{f}$ est bien définie (c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du choix du représentant) et qu'elle est injective.

Correction 45. 1. Évident.

2. Soit x dans E. La classe d'équivalence de x modulo $\sim$ est
$$\overline{x} = \{y \in E, f(x) = f(x)\} = f^{-1}(\{f(x)\}).$$
(**ATTENTION !** Ici j'ai parlé d'image réciproque d'un ensemble, pas de la fonction f^{-1} ! Je ne peux donc pas « simplifier » $f^{-1}(\{f(x)\})$.)
La proposition « f injective » se traduit par
$$\forall x \in E, \overline{x} = \{x\}.$$
3. Soient x et x' les représentants d'une même classe d'équivalence modulo $\sim$. Alors $x \sim x'$, c'est-à-dire que $f(x) = f(x')$, donc le choix du représentant n'influe pas sur la valeur prise par $\overline{f}$.
Montrons qu'alors $\overline{f}$ est injective. Soient $\overline{x}$ et $\overline{x'}$ deux classes d'équivalence modulo $\sim$, x et x' leurs représentants. Supposons $\overline{f}(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{x'})$. On a alors $f(x) = f(x')$, donc $x \sim x'$, donc $\overline{x} = \overline{x'}$. Donc $\overline{f}$ est injective.

Exercice 25. *Ordres non totaux et prolongements*. ●○○ -●●●
Les questions marquées d'une étoile (*) sont des questions plus difficiles pour les plus algébristes d'entre vous.

1. $\boxed{\text{COURS}}$ Soit E un ensemble, $\preceq$ une relation binaire sur E. Définir « $\preceq$ est une relation d'ordre sur E ».

Correction 46. $\preceq$ est une relation d'ordre si elle est

- réflexive, i.e. $\forall x \in E,\ x \preceq x$
- antisymétrique, i.e. $\forall (x, y) \in E^2$, $(x \preceq y$ et $y \preceq x) \Rightarrow x = y$
- transitive, i.e. $\forall (x, y, z) \in E^3$, $(x \preceq y$ et $y \preceq z) \Rightarrow x \preceq z$.

2. (cette question est indépendante des questions suivantes) Soit $(E, \preceq)$ un ensemble muni d'une relation d'ordre. Soit f une application de E dans E, et $\lhd_f$ la relation binaire sur E définie par

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \lhd_f y \Leftrightarrow f(x) \preceq f(y).$$

(a) Démontrer que $\lhd_f$ est réflexive et transitive.

Correction 47. Réflexivité. Soit x dans E. Alors $f(x) = f(x)$ donc $f(x) \preceq f(x)$. Donc $x \lhd_f x$.
Transitivité. Soient x, y et z trois éléments de E tels que $x \lhd_f y$ et $y \lhd_f z$. Alors $f(x) \preceq f(y)$ et $f(y) \preceq f(z)$. Par transitivité de $\preceq$, $f(x) \preceq f(z)$. Donc $x \lhd_f z$. D'où la transitivité.

(b) Démontrer que $\lhd_f$ est une relation d'ordre si et seulement si f est injective.
On raisonnera par double implication et on fera très attention au squelette de la démonstration. Cette question rapportera beaucoup de points, faites-la soigneusement.

Correction 48. Raisonnons par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\lhd_f$ est une relation d'ordre. Montrons que f est injective. Soient x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$. Alors $f(x) \preceq f(x')$ donc $x \lhd_f x'$. Mais on a aussi $f(x') \preceq f(x)$ donc $x' \lhd_f x$. Comme $\lhd_f$ est une relation d'ordre, elle est antisymétrique donc $x = x'$. D'où l'injectivité de f.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que f est injective. Montrons que $\lhd_f$ est une relation d'ordre. On sait déjà par la question précédente qu'elle est réflexive et transitive. Montrons alors qu'elle est antisymétrique. Soient x et x' tels que $x \lhd_f x'$ et $x' \lhd_f x$. Alors $f(x) \preceq f(x')$ et $f(x') \preceq f(x)$. Comme $\preceq$ est une relation d'ordre, $f(x) = f(x')$. Comme f est injective, $x = x'$. D'où l'antisymétrie de $\lhd_f$, donc $\lhd_f$ est une relation d'ordre.

(c) $\boxed{\text{COURS}}$ Définir « $\preceq$ est une relation d'ordre total » .

Correction 49. La proposition **«** $\preceq$ est une relation d'ordre total **»** se traduit par

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2,\ x \preceq y \text{ ou } y \preceq x.}$$

(d) Dans le cas où f est bijective, démontrer que $\lhd_f$ est une relation d'ordre total si et seulement si $\preceq$ est une relation d'ordre total.

Correction 50. Raisonnons par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\lhd_f$ est une relation d'ordre total. Soient x et y dans E. Posons $a = f^{-1}(x)$ et $b = f^{-1}(y)$. Alors $a \lhd_f b$ ou $b \lhd_f a$, i.e. $f(a) \preceq f(b)$ ou $f(b) \preceq f(a)$, i.e. $x \preceq y$ ou $y \preceq x$. $\boxed{\text{Donc } \preceq \text{ est une relation d'ordre total.}}$
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\preceq$ est une relation d'ordre total. Soient x et y dans E. Alors $f(x) \preceq f(y)$ ou $f(y) \preceq f(x)$, i.e. $x \lhd_f y$ ou $y \lhd_f x$. $\boxed{\text{Donc } \lhd_f \text{ est une relation d'ordre total.}}$

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble muni d'une relation d'ordre. Soit $\leqq$ une autre relation d'ordre sur E. On dit que $\leqq$ est un **prolongement** de la relation $\preceq$ si

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \preceq y \Rightarrow x \leqq y.$$

On dit que c'est un **prolongement total** si $\leqq$ est un prolongement de $\preceq$ et $\leqq$ est totale.

3. (a) $\boxed{\text{COURS}}$ On rappelle que la relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{N}$ est définie par

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ m|n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ n = km.$$

Montrer que cette relation est une relation d'ordre. L'ordre défini est-il total ? (on demande une justification)

Correction 51. On vérifie successivement les trois points.

- Réflexivité : soit n dans $\mathbb{N}$. Alors $n = 1 \times n$ donc $n|n$.
- Antisymétrie : soient m et n dans $\mathbb{N}$ tels que $n|m$ et $m|n$. Alors on dispose de k dans $\mathbb{N}$ tel que $m = kn$ et de ℓ dans $\mathbb{N}$ tel que $n = \ell m$. Alors $n = k\ell n$. Donc ou bien $n = 0$ et alors $m = 0$, donc $m = n$, ou bien $n \neq 0$ alors $k\ell = 1$. Étant entiers positifs, on a nécessairement $k = \ell = 1$ donc $m = n$. D'où l'antisymétrie.
- Transitivité : soient m, n et p dans $\mathbb{N}$ tels que $m|n$ et $n|p$. Alors on dispose de k dans $\mathbb{N}$ et de ℓ dans $\mathbb{N}$ tels que $n = km$ et $p = \ell n$. Donc $p = (k\ell)m$, donc m divise p. D'où la transitivité.

Donc $|$ est relation d'ordre.
Cette relation d'ordre n'est pas totale. En effet, si $m = 2$ et $n = 3$, on n'a ni $m|n$, ni $n|m$. Donc il existe des éléments non comparables.

(b) Sur $\mathbb{N}^*$, montrer que la relation d'ordre usuel $\leqslant$ est un prolongement total de la relation de divisibilité $|$. Le résultat fonctionne-t-il toujours sur $\mathbb{N}$?

Correction 52. Soient n et m tels que $m|n$. Alors on dispose de k dans $\mathbb{N}$ tel que $n = km$. Comme m et n sont non nuls, $k \neq 0$. Donc $k \geqslant 1$ donc $km \geqslant m$ donc $m \leqslant n$. Donc $\leqslant$ est un prolongement total de $|$.
En revanche, sur $\mathbb{N}$, le résultat ne fonctionne pas. En effet, 3 divise 0 mais on n'a pas $3 \leqslant 0$.

Le but de la fin de l'exercice est de prolonger totalement une relation d'ordre quelconque sur un ensemble. Soit $(E, \preceq)$ un ensemble muni d'une relation d'ordre. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur E par

$$\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x = y) \text{ ou } (x \text{ et } y \text{ ne sont pas comparables})$$

(pour rappel, on dit que x et y sont comparables si $x \preceq y$ ou $y \preceq x$)

4. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est réflexive et symétrique.

Correction 53.
- **Réflexivité.** Soit x dans E. Alors $x = x$ donc $x\mathcal{R}x$. Donc la relation est réflexive.
- **Symétrie.** Soient x et y dans E tels que $x\mathcal{R}y$. Si $x = y$ alors $y = x$ donc $y\mathcal{R}x$. Si x et y ne sont pas comparables, alors y et x ne sont pas comparables, donc $y\mathcal{R}x$. Donc la relation est symétrique.

5. On se pose la question de la transitivité de cette relation dans certains cas particuliers :

(a) Montrer que lorsque $\preceq$ est total, alors $\mathcal{R}$ est transitive.

Correction 54. Soient (x, y, z) trois éléments de E tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Comme $\preceq$ est totale, x et y sont nécessairement comparables donc $x = y$. De même, y et z sont nécessairement comparables donc $y = z$. Donc, par transitivité de la relation d'égalité, $x = z$, donc $x\mathcal{R}z$.

(b) Montrer que lorsque $E = \mathbb{N}^*$ et $\preceq$ est la relation de divisibilité, alors la relation n'est pas transitive.

Correction 55. Posons $x = 2$, $y = 3$ et $z = 4$. Alors $x\mathcal{R}y$ car x et y ne sont pas comparables. De même $y\mathcal{R}z$ car y et z ne sont pas comparables. Mais $x \neq z$ et x et z sont comparables car 2 divise 4 donc on n'a pas $x\mathcal{R}z$. Donc $\mathcal{R}$ n'est pas transitive !

Pour finir l'exercice, on se place dans le cas où E est fini et $\mathcal{R}$ est transitive, i.e. lorsque $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. On définit, pour x et y dans E, $x \prec y$ par « $(x \preceq y)$ et $x \neq y$ ».

6. Questions de cours.

(a) $\boxed{\text{COURS}}$ Définir ce qu'est la classe d'équivalence d'un élément de E.

Correction 56. Si x est un élément de E, la classe d'équivalence de x est l'ensemble $\overline{x} = \{y \in E,\ y\mathcal{R}x\}$.

On nomme alors $c_1, \dots, c_n$ les classes d'équivalence de E. Il y en a un nombre fini car E est fini.

(b) $\boxed{\text{COURS}}$ Si $i \neq j$, que peut-on dire de $c_i \cap c_j$? Que vaut $\bigcup_{i=1}^{n} c_i$? (on ne demande pas de justifications)

Correction 57. On sait que si $i \neq j$, $c_i \cap c_j = \emptyset$. De même, $\bigcup_{i=1}^{n} c_i = E$.

7. (a) (*) Soient a et b deux éléments de E. Montrer que si $a\mathcal{R}b$ alors on ne peut pas avoir $a \prec b$.

Correction 58. Si $a\mathcal{R}b$, alors ou bien $a = b$ donc on n'a pas $a \neq b$ donc on n'a pas $a \prec b$, ou bien a et b ne sont pas comparables, donc on n'a pas $a \preceq b$ donc on n'a pas $a \prec b$.

(b) (*) Soient x, y, x' et y' quatre éléments de E tels que $x\mathcal{R}x'$ et $y\mathcal{R}y'$. Montrer que si $x \prec y$ alors $x' \prec y'$. *On pourra commencer par montrer que $x \prec y'$.*

Correction 59. Déjà, on montre que $x \prec y'$. Si x et y' n'étaient pas comparables, alors on aurait $x\mathcal{R}y'$ donc, par transitivité de $\mathcal{R}$, $x\mathcal{R}y$. Ceci est impossible car $x \neq y$ et $x \preceq y$, i.e. x et y sont comparables. Donc x et y' sont comparables. Si on avait $y' \preceq x$, comme on a $x \prec y$, on aurait $y' \prec y$, i.e. y et y' comparables, mais pas égaux, ce qui contredirait $y\mathcal{R}y'$. $\boxed{\text{Donc } x \prec y'.}$
Ensuite, si x' et y' sont nécessairement comparables. Si ce n'était pas le cas, on aurait $x'\mathcal{R}y'$, donc $x\mathcal{R}y$, toujours impossible. De même, si $y' \preceq x'$, alors on aurait $x \prec x'$, absurde car $x\mathcal{R}x'$.

Pour chaque classe d'équivalence c_i, on définit une relation d'ordre arbitraire, $\lesssim_i$ (on prend tous les éléments de c_i que l'on ordonne dans l'ordre que l'on souhaite). On définit alors la relation $\lessapprox$ sur E par

$$\forall (x, y) \in E^2, (x \lessapprox y) \Leftrightarrow (x \prec y) \text{ ou } \Big((x \text{ et } y \text{ appartiennent à une même classe d'équivalence } c_i) \text{ et } (x \lesssim_i y) \Big)$$

8. (**) Montrer que $\lessapprox$ est une relation d'ordre, et que c'est un prolongement total de $\preceq$.

Correction 60. On montre déjà que $\lessapprox$ est une relation d'ordre.

- **Réflexivité**. Soit x dans E. Soit i dans $[\![1, n]\!]$ tel que $x \in c_i$. Alors comme $\lesssim_i$ est une relation d'ordre, $x \lesssim_i x$ donc $x \lessapprox x$. D'où la réflexivité.
- **Antisymétrie.** Soient x et y dans E tels que $x \lessapprox y$ et $y \lessapprox x$.
  - — si $x\mathcal{R}y$, alors x et y sont dans une même classe d'équivalence c_i. Alors $x \lesssim_i y$ et $y \lesssim_i x$. Donc, comme $\lesssim_i$ est une relation d'ordre, $x = y$.
  - — sinon, alors $x \neq y$ et x et y sont comparables pour $\preceq$ donc, comme $x \lessapprox y$, $x \prec y$. De même, comme $y \lessapprox x$, $y \prec x$. Ceci est impossible car $x \neq y$!

  Donc $x = y$, d'où l'antisymétrie.
- **Transitivité.** Soient x, y et z trois éléments de E tels que $x \lessapprox y$ et $y \lessapprox z$. Alors
  - — si $x \prec y$ et $y \prec z$, alors par transitivité de $\preceq$, $x \preceq z$ et $z \neq z$ donc $x \prec z$. Donc $x \lessapprox z$.
  - — si $x \prec y$ et y et z sont dans la même classe d'équivalence, i.e. $y\mathcal{R}z$, alors la question précédente nous indique que $x \prec z$. Donc $x \lessapprox z$.
  - — si x et y sont dans la même classe d'équivalence, i.e. $x\mathcal{R}y$, et $y \prec z$, alors la question précédente nous indique que $x \prec z$. Donc $x \lessapprox z$.
  - — enfin, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors les trois éléments sont dans la même classe d'équivalence c_i. Donc $x \lesssim_i y$ et $y \lesssim_i z$ donc, par transitivité de $\lesssim_i$, $x \lesssim_i z$, donc $x \lessapprox z$.

  D'où, dans tous les cas, $x \lessapprox z$ d'où la transitivité.

Donc $\lessapprox$ est une relation d'ordre.
Montrons ensuite qu'elle est totale. Soient x et y dans E. Alors

- si $x\mathcal{R}y$, alors x et y sont dans la même classe d'équivalence c_i donc, comme $\lesssim_i$ est totale, $x \lesssim_i y$ ou $y \lesssim_i x$ donc $x \lessapprox y$ ou $y \lessapprox x$.
- sinon, alors $x \neq y$ et x et y sont comparables, i.e. $x \prec y$ ou $y \prec x$. Donc $x \lessapprox y$ ou $y \lessapprox x$.

Dans tous les cas, x et y sont comparables pour $\lessapprox$.
Montrons enfin que cette relation est un prolongement de $\preceq$. Soient x et y dans E tels que $x \preceq y$. Alors

- si $x\mathcal{R}y$, alors $x = y$ donc $x \lessapprox y$.
- si x n'est pas en relation avec y, alors $x \neq y$ car x et y sont comparables. Donc $x \prec y$. Donc $x \lessapprox y$.

Donc $\lessapprox$ est bien un prolongement de $\preceq$.