

## TD 8

### Nombres réels et suites

#### 1 Exercices corrigés en classe

**Exercice 1.** *Moyenne de Cesàro, exercice ultra-classique.* ●●○

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels. Soit  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie pour tout entier  $n$  par  $S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$ .

1. On suppose que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ , avec  $\ell \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ell$ . On commencera par  $\ell = 0$ .
2. On suppose que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ .
3. Les réciproques des deux énoncés précédents sont-elles vraies ?

#### Correction

Exercice corrigé en cours : me demander si besoin d'éclaircissements.

**Exercice 2.** *Moyenne arithmético-géométrique.* ●●○ Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs. On définit les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$\begin{cases} u_0 = a, v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$

Démontrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes et convergent vers la même limite.

**Exercice 3.** *Vers le critère de d'Alembert.* Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels strictement positifs. On suppose que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ , avec  $\ell$  un réel.

1. Montrer que si  $\ell < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

#### Correction

On sait que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{+\infty} \ell < 1$ . Soit  $a$  tel que  $\ell < a < 1$  ( $a = \frac{1+\ell}{2}$  par exemple). Alors on dispose d'un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} < a.$$

Alors on montre par une récurrence immédiate que

$$\forall n \geq N, u_n \leq a^{n-N} u_N.$$

Or,  $a^{n-N} u_N \xrightarrow{+\infty} 0$  car  $0 < a < 1$ , donc, comme  $u_n > 0$ , on en déduit par théorème d'encadrement que  $u_n \xrightarrow{+\infty} 0$ .

2. Montrer que si  $\ell > 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

#### Correction

En posant encore  $a = \frac{\ell+1}{2}$ , on a cette fois-ci  $\ell > a > 1$ , et on dispose de  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq a,$$

donc

$$\forall n \geq N, u_n \geq a^{n-N} u_N.$$

Comme  $a > 1$  et  $u_N > 0$ ,  $a^{n-N}u_N \xrightarrow{+\infty} +\infty$  et  $u_n \xrightarrow{+\infty} +\infty$ .

3. Que peut-on dire si  $\ell = 1$  ?

**Correction**

Si  $\ell = 1$  on ne peut rien dire : prendre  $u_n = n$  et  $v_n = \frac{1}{n}$ .

**Exercice 4.** ●●○ Soit  $(u_n)$  une suite réelle.

1. On suppose  $(u_{2n})$ ,  $(u_{2n+1})$  convergentes de même limite. Montrer que  $(u_n)$  converge.

**Correction**

C'est du cours !

2. On suppose  $(u_n)$  croissante et  $(u_{2n})$  convergente. Montrer que  $(u_n)$  converge.

**Correction**

Montrons que  $(u_n)$  est majorée.  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente, donc bornée, donc majorée par  $M \in \mathbb{R}$ . Soit alors  $n \in \mathbb{N}$  : si  $n$  est pair,  $u_n \leq M$  ; si  $n$  est impair,  $n+1$  est pair donc  $u_{n+1} \leq M$ , donc, par croissance de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $u_n \leq M$ . Donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée, donc convergente car croissante.

3. On suppose  $(u_{2n})$ ,  $(u_{2n+1})$  et  $(u_{3n})$  sont convergentes. Montrer que  $(u_n)$  converge.

**Correction**

Posons  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n}$ ,  $\ell' = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1}$ ,  $\ell'' = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{3n}$ . La suite  $(u_{6n})$  est extraite de  $(u_{2n})$  donc converge vers  $\ell$  ; mais elle est aussi extraite de  $(u_{3n})$  donc converge vers  $\ell''$ . Donc  $\ell = \ell''$ . De même, la suite  $(u_{3(2n+1)})$  est à la fois extraite de  $(u_{2n+1})$  et  $(u_{3n})$  donc  $\ell' = \ell''$ . Donc  $\ell = \ell'$ . Donc  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent vers la même limite. Donc  $(u_n)$  converge.

**Exercice 5.** ●●○ On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 2$ .

**Correction**

On procède par récurrence : pour l'initialisation,  $u_0 = 3 > 2$  et ensuite, si  $u_n > 2$ , on calcule

$$u_{n+1} - 2 = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 2 = \frac{4u_n - 2 - 2u_n - 2}{u_n + 1} = \frac{2(u_n - 2)}{u_n + 1} > 0,$$

par HR. D'où l'hérédité et le résultat.

2. Étudier la monotonie de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Correction**

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}$ . Alors

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - u_n = \frac{4u_n - 2 - u_n^2 - u_2}{u_n + 1} = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{u_n + 1} = -\frac{(u_n - 2)(u_n - 1)}{u_n + 1} < 0,$$

car  $u_n > 2$ . Donc  $(u_n)$  est décroissante.

3. En déduire la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Correction**

Décroissante et minorée, la suite converge. Soit  $\ell$  sa limite. Alors comme  $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$ ,  $\ell = \frac{4\ell - 2}{\ell + 1}$  (car  $(u_{n+1})$  est extraite de  $(u_n)$ ), donc  $\ell^2 + \ell = 4\ell - 2$ . Donc  $\ell = 1$  ou  $\ell = 2$  (on résout l'équation). Or, pour tout  $n$ ,  $u_n > 2$  donc, en passant à la limite,  $\ell \geq 2$  donc  $\ell = 2$ .

**Exercice 6.** ●○○ Soit  $(u_n)$  une suite décroissante de réels telle que  $u_n + u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ . Déterminer la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ainsi qu'un équivalent en  $+\infty$ .

**Correction**

**ATTENTION!** On ne sait pas que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge ! Donc on ne peut pas dire que  $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell + \ell$  donc que  $\ell = 0$ ... En revanche, comme  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante, on a, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} \leq u_n$ , donc

$$u_n + u_{n+1} \leq 2u_n \leq u_{n-1} + u_n,$$

Or,  $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$  et  $u_{n-1} + u_n \sim \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$ . Donc, par encadrement,  $2u_n \sim \frac{1}{n}$  donc  $u_n \sim \frac{1}{2n}$ .

**Exercice 7.** ●●○ Déterminer, à l'aide des relations de domination, de négligeabilité, et d'équivalence, les limites des suites suivantes

1.  $\frac{\sin \frac{1}{n}}{\tan \frac{1}{2n}}$

3.  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

5.  $\frac{1 - e^{\frac{3}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1}$

2.  $\frac{n^4 - 2n^{5/2} + n\sqrt{n} - \ln(n)}{n + 3n^2 \sin \frac{1}{\sqrt{n}} - n \ln(n)}$

4.  $(1 + nx)^{\frac{1}{n}}$

6.  $\frac{n^3 \sin \frac{3}{1+n}}{\text{Arctan} \frac{1}{8n^2} e^{\sqrt{n}}}$

## 2 Exercices à travailler en TD

**Plan de travail, par méthodes et techniques à connaître**

- déterminer des limites : exercices 11, 13, 14, 15, 16.
- manipuler des parties entières : exercices 18, 19.
- manipuler des suites extraites : exercice 20.
- manipuler des  $\epsilon$  (pour revenir à la définition de la convergence par exemple) : exercices corrigés en classe 3 et 1, exercices 19, 8.
- étudier des suites récurrentes : exercices faits en classe 2 et 5, exercices 25, 26, 27, 28.

### 2.1 Epsiloneries

**Exercice 8.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle vérifiant

$$\forall (k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{k} + \frac{k}{n}.$$

Démontrer que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

**Exercice 9.** Vers le critère de Cauchy pour les séries. ●●○ Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels strictement positifs. On suppose que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{\frac{1}{n}} = \ell$ , avec  $\ell$  un réel.

1. Montrer que si  $\ell < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

**Correction**

On raisonne de même : si  $a = \frac{\ell + 1}{2}$ , on dispose d'un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N, \sqrt[n]{u_n} < a,$$

donc

$$\forall n \geq N, u_n \leq a^n \xrightarrow[+\infty]{} 0,$$

et on conclut par théorème d'encadrement.

2. Montrer que si  $\ell > 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**Correction**

De même si  $\ell > 1$ .

3. Que peut-on dire si  $\ell = 1$ ?

**Correction**

Enfin, si l'on prend  $u_n = e^{\sqrt{n}}$  et  $v_n = e^{-\sqrt{n}}$ ,  $u_n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ ,  $v_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$  alors que  $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[+\infty]{} 1$  et  $\sqrt[n]{v_n} \xrightarrow[+\infty]{} 1$ .

**Exercice 10.** Une propriété de limite monotone. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} : [p \geq n \text{ et } (\forall q \in \mathbb{N}, q \geq p \Rightarrow u_q \geq u_n)]$$

1. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle monotone ?

**Correction**

NON ! Si on prend  $u_n = n + (-1)^n$  : alors  $u_{n+1} - u_n = n + 1 + (-1)^{n+1} - n - (-1)^n = 1 + 2 \cdot (-1)^{n+1}$ , qui change de signe en fonction de la parité de  $n$ . Donc la suite n'est pas croissante.

soit  $n \in \mathbb{N}$ . Posons  $p = n + 2$ . Soit  $q \geq p$ . Alors

$$u_q - u_n = (q - n) + (-1)^q - (-1)^n.$$

Or,  $q - n \geq 2$  donc  $q - n + (-1)^q - (-1)^n \geq 0$ . Donc la suite vérifie la propriété.

2. Montrer en revanche que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie une propriété « de limite monotone » : si elle est majorée elle converge, et si elle n'est pas majorée, elle tend vers  $+\infty$ .

**Correction**

On considère  $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ .

. Si  $A$  est majorée, soit  $\ell$  sa borne supérieure. Soit  $\varepsilon > 0$ . Par définition de la borne supérieure, on dispose de  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell$ . Par la proposition satisfaite par  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on dispose de  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $N \geq n$  et  $\forall q \in \mathbb{N}, q \geq N \Rightarrow u_q \geq u_N$ .

Soit  $q \geq N$ . Alors  $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq u_q \leq \ell$ . Ceci assure la convergence de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

. Sinon, soit  $M \in \mathbb{N}$ . On dispose donc de  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $u_n \geq M$ . Par la proposition satisfaite par  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on dispose de  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $N \geq n$  et  $\forall q \in \mathbb{N}, q \geq N \Rightarrow u_q \geq u_N$ . Soit  $q \geq N$ . Alors  $u_q \geq u_N \geq M$ . Ceci assure la divergence de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $+\infty$ .

## 2.2 Théorèmes généraux sur les suites et les limites

**Exercice 11.** ●○○ Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1, 0 \leq v_n \leq 1 \text{ et } u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

Que dire de ces suites ?

**Correction**

Ces deux suites convergent vers 1. En effet, comme pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq 1$ , alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n v_n \leq v_n \leq 1.$$

Or,  $u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ .

Donc, par théorème d'encadrement,  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ .

De même,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ .

**Exercice 12.** ●●○ Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites telles que

$$\begin{cases} n \in \mathbb{N}, u_n \leq a \text{ et } v_n \leq b \\ u_n + v_n \rightarrow a + b \end{cases}$$

Montrer que  $u_n \rightarrow a$  et  $v_n \rightarrow b$ .

**Correction**

Là, on va utiliser des  $\varepsilon$ .

**Soit**  $\varepsilon > 0$ . Comme  $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a + b$ , on dispose de  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N$ ,

$$a + b - \varepsilon \leq u_n + v_n \leq a + b + \varepsilon,$$

donc, si  $n \geq N$ ,

$$a - \varepsilon + (b - v_n) \leq u_n \leq a + \varepsilon + (b - v_n)$$

Mais  $b - v_n \geq 0$ , donc pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n \geq a - \varepsilon$ . Or,  $u_n \leq a$  donc pour tout  $N \geq N$ ,

$$a - \varepsilon \leq u_n \leq a + \varepsilon.$$

Donc  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ .

De même,  $v_n = u_n + v_n - u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a + b - a = b$ .

**Exercice 13.** ●○○

1. Démontrer que pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,  $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$ .

**Correction**

Soit  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Alors

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k},$$

par étude de fonctions.

2. Déterminer la limite, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

**Correction**

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Alors

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty,$$

donc  $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  par minoration.

**Exercice 14.** ●○○ / ●●○ Déterminer les limites en  $+\infty$  des suites de terme général

1.  $\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}$

2.  $\sqrt[n]{n^2}$

3.  $\sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2}$

4.  $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

5.  $\frac{\sin(2n)}{\text{th}(3n)}$

6.  $\frac{n^n}{n!}$

7.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$

8.  $\sum_{k=1}^n \frac{\lfloor kx \rfloor}{n^2}$

**Correction**

1. On écrit, si  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} &= \frac{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}} \\ &= \frac{2n}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}} \\ &= \frac{2n}{2n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

2. Si  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n^2} &= n^{\frac{2}{n}} \\ &= e^{\frac{2}{n} \ln(n^2)} \end{aligned}$$

Or, par croissances comparées,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(n^2) = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$ .

3.  $\sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2}$

On peut calculer directement cette somme :

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

4.  $\frac{n^n}{n!}$

On écrit  $\frac{n^n}{n!} = \frac{n \times n \times \dots \times n}{1 \times 2 \times \dots \times n}$ . L'idée va être de séparer ce produit en 2, avec une partie minorée et une partie qui tend vers  $+\infty$ . Écrivons

$$\frac{n^n}{n!} = n \times \frac{n^{n-1}}{n!}.$$

Or,  $n! = \prod_{k=1}^n k = \prod_{k=2}^n k \leq \prod_{k=2}^n n = n^{n-1}$ , donc  $\frac{n^{n-1}}{n!} \geq 1$ , donc  $\frac{n^n}{n!} \geq n$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$ .

5.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+k^2}$

Bornons chacun des termes de la somme. Si  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\frac{1}{n^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2+k^2} \leq \frac{1}{1+n^2}.$$

En sommant sur  $k$ , on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2n^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+k^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+n^2},$$

soit

$$\frac{n}{2n^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+k^2} \leq \frac{n}{n^2+1},$$

or

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n^2} &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2+1} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+k^2} = 0 \text{ par encadrement.}$$

6.  $\sum_{k=1}^n \frac{[kx]}{n^2}$

Encadrons le terme sommé. Par définition, si  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$kx - 1 \leq [kx] \leq kx,$$

donc

$$\frac{kx - 1}{n^2} \leq \frac{[kx]}{n^2} \leq \frac{kx}{n^2}.$$

En sommant sur  $k$ , on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{kx - 1}{n^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{[kx]}{n^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{kx}{n^2}.$$

Or,  $\sum_{k=1}^n \frac{kx}{n^2} = \frac{xn(n+1)}{2n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2}$ . De même,

$$\sum_{k=1}^n \frac{kx - 1}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{kx}{n^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{xn(n+1)}{2n^2} - \frac{n}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2}.$$

Donc, par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{[kx]}{n^2} = \frac{x}{2}$$

**Exercice 15.** *Problème d'interversion des limites.* ●●○

Comparer

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

**Correction**

1. Soit  $k$  dans  $\mathbb{N}$ . Alors, comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = 1$ .

Donc, pour tout  $k$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = 1$ . Donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = 1.$$

2. Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Alors  $-1 < 1 - \frac{1}{n} < 1$ , donc la suite géométrique de raison  $1 - \frac{1}{n}$  est de

limite nulle. Donc  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = 0$ .

Donc pour tout  $n$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = 0$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = 0.$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = e.$$

**Exercice 16.** Sur l'indétermination  $1^\infty$ . ●●○

Soit  $\ell$  un élément de  $\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ . Déterminer deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  telles que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$ , et  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{v_n} = \ell$ .

**Correction**

Si  $\ell = 0$ , posons  $v_n = n^2$  et  $u_n = e^{-\frac{1}{n}}$ . Alors  $u_n^{v_n} = e^{-\frac{1}{n} \times n^2} = e^{-n} \xrightarrow{+\infty} 0$ .

Si  $\ell > 0$ , posons  $v_n = n$  et  $u_n = e^{\frac{\ln(\ell)}{n}}$ . Alors  $u_n^{v_n}$  est la suite constante égale à  $\ell$ .

Si  $\ell = +\infty$ , posons  $v_n = n^2$  et  $u_n = e^{\frac{1}{n}}$ . Alors  $u_n^{v_n} = e^{\frac{1}{n} \times n^2} = e^n \xrightarrow{+\infty} +\infty$ .

**Exercice 17.** ●●○ On va démontrer que la suite  $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$  n'a pas de limite. On suppose que c'est le cas et qu'elle en possède une.

1. Démontrer que cette limite est finie. On l'appelle  $\ell$ .

**Correction**

Si  $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$  possède une limite, comme  $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, cette limite est nécessairement finie.

2. Démontrer que la suite  $(\cos(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ , puis que  $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

**Correction**

$(\cos(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$  est extraite de  $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$  donc converge aussi vers  $\ell$ . Mais on sait que

$$\cos(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1).$$

$$\text{Comme } \sin(1) \neq 0, \sin(n) = \frac{\cos(n+1) - \cos(n)\cos(1)}{\sin(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell(1 - \cos(1))}{\sin(1)}.$$

3. Aboutir à une contradiction en échangeant les rôles de sin et de cos.

**Correction**

Notons  $\ell'$  la limite de  $\sin(n)$ . Alors  $\ell' = \ell \frac{1 - \cos(1)}{\sin(1)}$ .

Mais  $\sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \sin(1)\cos(n)$ . Donc

$$\cos(n) = \frac{\sin(n+1) - \sin(n)\cos(1)}{\sin(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell' \frac{1 - \cos(1)}{\sin(1)}.$$

Donc

$$\ell = \ell' \frac{1 - \cos(1)}{\sin(1)}.$$

Donc  $\ell = \ell \left( \frac{1 - \cos(1)}{\sin(1)} \right)^2$ . Or,  $\ell \neq 0$  car sinon  $\ell' = 0$ , donc on aurait  $\ell^2 + \ell'^2 = 0$ , absurde car  $\cos(n)^2 + \sin(n)^2 = 1$ . Donc

$$\left( \frac{1 - \cos(1)}{\sin(1)} \right)^2 = 1,$$

donc  $(1 - \cos(1))^2 = \sin(1)^2$ , donc  $(1 - \cos(1))^2 = 1 - \cos(1)^2 = (1 - \cos(1))(1 + \cos(1))$ . Mais  $\cos(1) \neq 1$ , donc  $1 - \cos(1) = 1 + \cos(1)$ , donc  $\cos(1) = 0$ , absurde!!!! Donc  $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$  ne possède pas de limite.

**Exercice 18.** ●●○ Soient  $a, b, c$  trois réels tels que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,

$$\lfloor an \rfloor + \lfloor bn \rfloor = \lfloor cn \rfloor.$$

Démontrer que  $a + b = c$ .

**Correction**

Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{\lfloor an \rfloor}{n} + \frac{\lfloor bn \rfloor}{n} = \frac{\lfloor cn \rfloor}{n}.$$

donc, en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ ,  $a + b = c$  !

(rq : on montre que  $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$  par encadrement)

**Exercice 19.** ●●○ Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels convergeant vers une limite  $\ell$  réelle. A-t-on

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lfloor u_n \rfloor = \lfloor \ell \rfloor ?$$

**Correction**

Montrons déjà que si  $\ell \notin \mathbb{Z}$ , alors  $\lfloor u_n \rfloor \xrightarrow{+\infty} \ell$ . Si  $\ell \notin \mathbb{Z}$ , on a  $\lfloor \ell \rfloor < \ell < \lfloor \ell \rfloor + 1$ , donc si

$\varepsilon = \frac{1}{2} \min(\lfloor \ell \rfloor + 1, \ell)$  Alors  $\lfloor \ell \rfloor < \ell - \varepsilon < \ell < \ell + \varepsilon < \lfloor \ell \rfloor + 1$ . (Penser qu'on s'est pris une marge afin de rester à l'intérieur de l'intervalle  $]\lfloor \ell \rfloor, \lfloor \ell \rfloor + 1[$ .)

Or,  $u_n \xrightarrow{+\infty} \ell$  donc on dispose de  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$ . Mais alors si  $n \geq N$ ,

$$\lfloor \ell \rfloor < \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon < \lfloor \ell \rfloor + 1,$$

donc pour tout  $n \geq N$ ,  $\lfloor u_n \rfloor = \lfloor \ell \rfloor$ , donc  $\lfloor u_n \rfloor$  est constante égale à  $\lfloor \ell \rfloor$  à pcr, donc  $\lfloor u_n \rfloor \xrightarrow{+\infty} \lfloor \ell \rfloor$ .

En revanche, si  $\ell \in \mathbb{Z}$ ,  $\lfloor u_n \rfloor$  tend vers  $\lfloor \ell \rfloor$  si, et seulement si  $u_n \geq \ell$  à pcr. En effet, si c'est le cas, en posant  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , on a  $\ell \leq u_n \leq \ell + \frac{1}{2}$  à pcr, donc  $\lfloor u_n \rfloor$  constante égale à pcr. Si ce n'est pas le cas alors  $\lfloor u_n \rfloor$  possède une suite extraite convergent vers  $\lfloor \ell \rfloor - 1$ .

## 2.3 Du côté des sous-suites

**Exercice 20.** ●●○ Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

1. On suppose que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas majorée. Montrer qu'elle admet une suite extraite qui diverge vers  $+\infty$ .

**Correction**

Par hypothèse, on suppose que

$$\forall M \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M.$$

Il nous faut alors **construire** une extraction  $\varphi$ . Construisons-la par récurrence.

**Prenons**  $M = 0$  et **prenons**  $N = 0$ . Alors on dispose de  $n_0$  dans  $\mathbb{N}$  tel que  $u_{n_0} > 0$ .

**Posons**  $\varphi(0) = n_0$ .

**Supposons**  $\varphi(n)$  construite pour un certain  $n$ . **Prenons**  $M = n$  et **prenons**  $N = \varphi(n) + 1$ .

Alors on dispose de  $k_0$  dans  $\mathbb{N}$  tel que  $k_0 > N$  et  $u_{k_0} > n$ . **Posons**  $\varphi(n+1) = k_0 > \varphi(n)$ .

Alors on a construit une fonction  $\varphi$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ , strictement croissante, car  $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ , et telle que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $u_{\varphi(n)} > n$ , donc  $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

2. On suppose que  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  ne tend pas vers  $+\infty$ . Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  possède une sous-suite bornée.

**Correction**

Nions «  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  » : on dispose de  $M > 0$  tel que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n| \leq M.$$

Construisons alors, par récurrence, une extraction  $\varphi$  telle que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $|u_{\varphi(n)}| \leq M$ .

**Initialisation.** Dans la proposition, prenons  $N = 0$ . Alors on dispose de  $n \geq 0$  tel que  $|u_n| \leq M$ . Notons  $\varphi(0) = n$ .

**Hérédité.** Si  $\varphi(k)$  a été construite pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ , on prend  $N = \varphi(k) + 1$  dans la proposition précédente. Alors on dispose de  $n \geq \varphi(k) + 1$  tel que  $|u_n| \leq M$ . Posons  $\varphi(k+1) = n$ . Alors  $\varphi(k+1) > \varphi(k)$  et  $|u_{\varphi(k+1)}| \leq M$ .

On a ainsi construit l'extraction désirée.

**Exercice 21.** ●●○ Soient  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  et  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$  deux suites telles que  $\frac{p_n}{q_n}$  converge vers un irrationnel  $x$ .

Démontrer que  $q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et que  $|p_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

On pourra procéder par l'absurde et par extractions de suites.

**Correction**

On suppose que  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne tend pas vers  $+\infty$ .

Alors on dispose d'une sous-suite de  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(q_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ , qui soit majorée (fait en classe!).

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on dispose d'une sous-suite de  $(q_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ , notons-la  $(q_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ , qui converge.

Mais  $(q_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'entiers qui converge, donc elle est stationnaire. En particulier, elle converge vers un entier.

Mais comme  $(q_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge, alors  $(q_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  aussi! Comme il s'agit d'une suite d'entiers, elle est stationnaire donc, en particulier, converge vers un entier. Donc  $\frac{p_{\varphi \circ \psi(n)}}{q_{\varphi \circ \psi(n)}}$  converge vers un quotient de deux entiers, i.e. vers un rationnel. Donc  $x$  est rationnel, absurde!

**Exercice 22.** *Approximation diophantienne.* ●●○ Si  $y$  est un réel, on appelle partie fractionnaire de  $y$  la quantité, notée  $\{y\}$  et définie par  $\{y\} = y - \lfloor y \rfloor$ . Soit  $x$  un réel.

1. Démontrer que :  $\forall N \in \mathbb{N}, \exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, 1 \leq q \leq N, \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{qN}$ .

On appliquera le principe des tiroirs à  $0, \{x\}, \{2x\}, \dots, \{Nx\}$ .

**Correction**

On considère les  $N$  intervalles  $\left[ \frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right]$  (fermé si  $k = N - 1$ ). Les  $N + 1$  points  $0, \{x\}, \{2x\}, \dots, \{Nx\}$  appartiennent à ces intervalles, donc, d'après le principe des tiroirs, il existe deux de ces points dans un de ces intervalles, i.e. il existe  $k$  et  $\ell$  tels que  $|\{kx\} - \{\ell x\}| \leq \frac{1}{N}$ . Alors

$$|(k - \ell)x - (\lfloor kx \rfloor - \lfloor \ell x \rfloor)| \leq \frac{1}{N},$$

i.e.

$$\left| x - \frac{(\lfloor kx \rfloor - \lfloor \ell x \rfloor)}{(k - \ell)} \right| \leq \frac{1}{N(k - \ell)},$$

en supposant  $k \geq \ell$ . En posant  $q = k - \ell$ , et  $p = \lfloor kx \rfloor - \lfloor \ell x \rfloor$ , comme  $q \leq N$ ,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2},$$

d'où le résultat !

2. En déduire qu'il existe une infinité de couples  $(p, q)$  dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  tels que  $\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$ .

**Correction**

Si  $x$  est rationnel, c'est évident : si  $x = \frac{a}{b}$ , prendre  $\frac{an}{bn}$  pour tout  $n$ .

Sinon, si  $x$  est irrationnel, on a construit, dans le théorème précédent, une suite  $(p_N, q_N)$  telle que pour tout  $N$ ,

$$\left| x - \frac{p_N}{q_N} \right| \leq \frac{1}{Nq_N}.$$

En particulier  $\frac{p_N}{q_N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} x$ . Mais  $q_N$  est une suite d'entiers. Si elle ne tend pas vers  $+\infty$ , on peut en extraire une sous-suite bornée  $(q_{\varphi(N)})$  (le redémontrer), de laquelle on peut extraire une sous-suite convergente  $(q_{\varphi \circ \psi(N)})$ . Mais une suite d'entiers convergente est stationnaire, donc  $(q_{\varphi \circ \psi(N)})$  est constante à partir d'un certain rang.

Donc  $(p_{\varphi \circ \psi(N)})$  est à son tour bornée, donc, possède une sous-suite convergente  $(p_{\varphi \circ \psi \circ \theta(n)})$ , donc constante à pr. Donc  $\frac{p_{\varphi \circ \psi \circ \theta(n)}}{q_{\varphi \circ \psi \circ \theta(n)}}$  est constante à pr et converge vers  $x$ , absurde.

Donc  $q_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$ , d'où une infinité de  $q_N \in \llbracket 1, n \rrbracket$  vérifiant

$$\left| x - \frac{p_N}{q_N} \right| \leq \frac{1}{Nq_N} \leq \frac{1}{q_N^2}.$$

## 2.4 Caractérisations séquentielles

**Exercice 23.** ●●○ Soit  $A$  la partie de  $\mathbb{R}$  suivante :

$$A = \left\{ \frac{nm}{n^2 + m^2 + 1}, (n, m) \in \mathbb{N}^2 \right\}.$$

1. Montrer que  $A$  possède une borne supérieure.

**Correction**

Pour tous entiers  $m$  et  $n$ ,  $nm \leq (n + m + 1)^2$ , donc  $A$  est majorée par 1. Non vide, cette partie de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure.

2. Déterminer la borne supérieure de  $A$ .

**Correction**

Montrons que  $\sup(A) = \frac{1}{2}$ .

Déjà, si  $m$  et  $n$  sont deux entiers, on sait que  $(m - n)^2 \geq 0$ , donc  $m^2 + n^2 \geq 2mn$ , donc  $2mn < m^2 + n^2 + 1$ , donc  $\frac{mn}{m^2 + n^2 + 1} < \frac{1}{2}$ . Donc  $\frac{1}{2}$  est un majorant de  $A$ .

Définissons la suite  $u_n$  par, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = \frac{n^2}{2n^2 + 1}.$$

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$ . Donc on a bien  $\frac{1}{2} = \sup(A)$ .

3. Montrer que  $A$  n'a pas de plus grand élément.

**Correction**

Cette borne supérieure n'est jamais atteinte car si  $m$  et  $n$  sont des entiers,

$$2mn < m^2 + n^2 + 1.$$

**Exercice 24.** ●○○ Montrer que l'ensemble

$$\left\{ \frac{n}{2^m}, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\}$$

est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Correction**

Soit  $x$  un réel. Montrons que la suite  $u_n = \frac{[2^n x]}{2^n}$  converge bien vers  $x$ . On sait que

$$x - \frac{1}{2^n} \leq \frac{[2^n x]}{2^n} \leq x.$$

Donc, par théorème d'encadrement, on a le résultat voulu.

## 2.5 Suites récurrentes

**Exercice 25.** ●○○ – ●●● Déterminer l'expression du terme général des suites définies par :

$$1. \begin{cases} u_0 = -1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 4, \end{cases}$$

$$2. \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = 2x_n + 3;$$

$$3. \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n + 1);$$

$$4. \begin{cases} u_0 = 1, \\ u_1 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2(u_{n+1} - u_n), \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} u_0 = 1, \\ u_1 = 2i, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2(i+1)u_{n+1} - 2iu_n, \end{cases}$$

$$6. \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0;$$

7.  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0;$
8.  $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = n \end{cases}$
9.  $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + 2u_n = n^2 \end{cases}$
10.  $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_1 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + n + 1 \end{cases}$
11.  $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_{n+2}} = \frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n} \end{cases}$  (on commencera par montrer que la suite est toujours définie et on introduira une suite auxiliaire)

**Correction**

1. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. Cherchons  $c$  tel que  $c = 3c - 4$ , c'est-à-dire  $c = 2$ . Alors la suite  $(u_n - 2)$  est géométrique de raison 3, donc pour tout entier  $n$ ,

$$u_n = (u_0 - 2)3^n + 2 = -3^{n+1} + 2.$$

2. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. Cherchons  $c$  tel que  $c = 2c + 3$ , c'est-à-dire  $c = -3$ . Alors la suite  $(x_n + 3)$  est géométrique de raison 2, donc pour tout entier  $n$ ,

$$x_n = (x_0 + 3)2^n - 3.$$

3. De même, on cherche  $c$  tel que  $c = \frac{1}{3}(c + 1)$  donc  $c = \frac{1}{2}$  et pour tout entier naturel  $n$ ,
- $$x_n = \frac{1}{2} + \left(x_0 - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

4. Il s'agit d'une suite récurrence linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique  $r^2 - 2r + 2 = 0$ , de racines  $1 \pm i$ , de module  $\sqrt{2}$  et d'argument  $\pm \frac{\pi}{4}$ . Donc on dispose de  $\lambda$  et  $\mu$  réels tels que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,

$$u_n = \lambda\sqrt{2}^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \mu\sqrt{2}^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right).$$

Comme  $u_0 = 1$ ,  $\mu = 1$  et comme  $u_1 = 0$ ,

$$\lambda\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

i.e.  $\lambda = -1$ , donc pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,

$$u_n = \sqrt{2}^n \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) \right).$$

5. Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est

$$r^2 - 2(i+1)r + 2iu_n,$$

de discriminant  $4(1+i)^2 - 8i = 0$ , de racine double  $1+i$ , donc on dispose de  $\lambda$  et  $\mu$  complexes tels que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,

$$u_n = (\lambda + \mu n)(1+i)^n.$$

Comme  $u_0 = 1$ ,  $\lambda = 1$ , et comme  $u_1 = 2i$ ,  $(\lambda + \mu)(1+i) = 2i$  donc  $\lambda + \mu = 1+i$  donc  $\mu = i$ . Finalement, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,

$$u_n = (1 + ni)(1+i)^n.$$

6. Posons  $v_n = \frac{1}{u_n}$ . Alors  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie la relation de récurrence

$$\begin{cases} v_0 = 1, \\ v_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \end{cases}$$

Donc  $v_n$  est la suite de Fibonacci au rang  $n + 1$ , donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \phi'^n),$$

où  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  et  $\phi' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .

Donc pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = \frac{\sqrt{5}}{\phi^n + \phi'^n}.$$

7. L'équation caractéristique liée à la relation de récurrence est

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

i.e.  $(x - 2)(x - 3) = 0$ . Donc l'équation possède deux racines réelles, et donc le terme général de  $(x_n)$  est

$$x_n = A.2^n + B.3^n,$$

où  $A$  et  $B$  sont des réels.

8. L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence est

$$x^2 - 4x + 4 = 0,$$

i.e.  $(x - 2)^2 = 0$ . L'équation possède donc une racine double : 2, et le terme général de  $(x_n)$  est

$$x_n = (An + B)2^n,$$

où  $A$  et  $B$  sont des réels.

9. Fait en cours.

10. Étudions d'abord la relation de récurrence :  $u_{n+1} + 2u_n = n^2$ . Pour ce faire, trois possibilités :

- Soit on essaie, à tâtons, de chercher une formule que l'on va démontrer par récurrence.
- Soit on essaie de calquer la méthode de variation de la constante. On résout l'équation homogène, on trouve des solutions de la forme  $u_n = A(-2)^n$ , où  $A$  est réel. On écrit alors  $A = A_n$  et on cherche les solutions de l'équation avec second membre sous la forme  $u_n = A_n(-2)^n$ . On a alors  $u_{n+1} = -2A_{n+1}(-2)^n$ , et donc

$$u_{n+1} + 2u_n = (A_{n+1} - A_n)(-2)^{n+1},$$

donc

$$A_{n+1} - A_n = \frac{n^2}{(-2)^{n+1}}.$$

Donc, par télescopage,

$$A_n = A_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{(-2)^{k+1}}.$$

Donc  $u_n = (-2)^n \left( A_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{(-2)^{k+1}} \right)$ , avec  $A_0 \in \mathbb{R}$ .

- Troisième possibilité, on commence toujours par résoudre l'équation homogène, de solution générale  $A \cdot (-2)^n$ ,  $A \in \mathbb{R}$ .  
Ensuite, on détermine une solution particulière en remarquant qu'on a un second membre sous la forme  $q^n P(n)$ , avec  $q = 1$  qui n'est pas racine de l'équation caractéristique  $x + 2 = 0$  ! Donc on cherche une solution particulière sous la forme  $u_n = an^2 + bn + c$ . On écrit alors

$$u_{n+1} + 2u_n = an^2 + 2an + a + bn + b + c + 2an^2 + 2bn + 2c = n^2.$$

Donc

$$3an^2 + (2a + b)n + (a + b + 2c) = n^2,$$

donc  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = -\frac{2}{3}$  et  $c = \frac{1}{6}$ . Donc les solutions générales sont de la forme

$$u_n = A \cdot (-2)^n + \frac{2n^2 - 4n + 1}{6},$$

avec  $A \in \mathbb{R}$ .

**11.** Fait en cours.

**Exercice 26.** ●●○ On considère la suite définie par  $u_0 > 3$ , et  $u_{n+1} = \frac{4u_n - 9}{u_n - 2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Tracer le graphe de  $x \mapsto \frac{4x - 9}{x - 2}$ , préciser les points d'intersection avec la droite  $y = x$ .
2. En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et les valeurs éventuelles de sa limite.

### Correction

Pour montrer que  $(u_n)$  est bien définie, montrons qu'elle ne s'annule jamais, en montrant par récurrence que  $u_n$  est toujours supérieure strictement à 3 ( $\mathcal{P}_n$ ).

**Initialisation.**  $u_0 > 3$

**Hérédité.** Supposons  $u_n > 3$  pour un certain  $n$ . Alors  $4u_n - 9 > 3u_n - 6 = 3(u_n - 2)$ , donc

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 9}{u_n - 2} > \frac{3(u_n - 2)}{u_n - 2} = 3.$$

**Conclusion.** Héréditaire et vraie au rang 0,  $(\mathcal{P}_n)$  est vraie pour tout entier en vertu du principe de récurrence.

Si  $u_n$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$ ,  $u_{n+1}$  converge aussi vers  $\ell$ . Par règles d'opérations sur les limites  $u_{n+1}$  converge aussi vers  $\frac{4\ell - 9}{\ell - 2}$ . Par unicité de la limite,  $\ell = \frac{4\ell - 9}{\ell - 2}$ , donc  $\ell^2 - 6\ell + 9 = 0$ , i.e.  $\ell = 3$ . Donc si  $(u_n)$  converge, elle converge vers 3.

3. On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$ . Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique.

### Correction

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}$ . Calculons  $v_{n+1}$ .

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1} - 3} \\ &= \frac{1}{\frac{4u_n - 9}{u_n - 2} - 3} \\ &= \frac{u_n - 2}{4u_n - 9 - 3u_n + 6} \\ &= \frac{u_n - 2}{u_n - 3} = v_n + 1. \end{aligned}$$

Donc  $(v_n)$  est arithmétique de raison 1. Donc pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = v_0 + n$ , avec  $v_0 > 0$ .

4. Étudier la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Correction**

On en déduit que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{1}{v_n} + 3$ , bien définie car  $v_n > 0$ . Or,  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 3$ .

**Exercice 27.** ●●○ Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles, telles que  $u_0 < v_0$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Montrer que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers une même limite à préciser.

**Correction**

Posons pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_n = u_n + v_n$  et  $b_n = u_n - v_n$ . Montrons que ces deux suites sont géométriques. Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}$ . Alors

$$a_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} + \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{3u_n + 3v_n}{3} = a_n.$$

Donc  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante égale à  $u_0 + v_0$ . De même,

$$b_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{1}{3}b_n.$$

Donc  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $\frac{1}{3}$  :  $b_n = b_0 \frac{1}{3^n}$ .

Donc pour tout  $n$  entier,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{u_0 + v_0 + \left(\frac{1}{3}\right)^n b_0}{2} \xrightarrow{+\infty} \frac{u_0 + v_0}{2}, \\ v_n &= \frac{a_n - b_n}{2} = \frac{u_0 + v_0 - \left(\frac{1}{3}\right)^n b_0}{2} \xrightarrow{+\infty} \frac{u_0 + v_0}{2}. \end{aligned}$$

**Exercice 28.** Soit  $(u_n)$  une suite définie par  $u_0 > 0$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ .

1. Montrer que  $(u_n)$  est croissante.

**Correction**

Soit  $n$  un entier naturel. Alors  $u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} > 0$ , donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

2. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**Correction**

Croissante, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge ou tend vers  $+\infty$ . Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite finie en  $+\infty$ , alors  $\ell = \ell + e^{-\ell}$ , donc  $e^{-\ell} = 0$ , ce qui est absurde. Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

3. On pose, pour tout  $n$  entier,  $v_n = e^{u_n}$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_n) = 1$ .

**Correction**

On calcule

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= e^{u_n + e^{-u_n}} - e^{u_n} \\ &= e^{u_n} (e^{e^{-u_n}} - 1) \end{aligned}$$

Or, si  $a_n$  tend vers 0,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1$ , donc on écrit

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= e^{u_n} (e^{e^{-u_n}} - 1) \\ &= \frac{e^{e^{-u_n}} - 1}{e^{-u_n}} \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 \end{aligned}$$

4. En utilisant le théorème de Cesàro, calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln(n)}$ .

**Correction**

Par le théorème de Cesàro, si  $w_n = v_{n+1} - v_n$ , on sait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} w_k}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{u_n}}{n} = 1.$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^{u_n}}{n}\right) = 0$ , i.e.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(e^{u_n}) - \ln(n) = 0$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1.$$

## 2.6 Un peu d'analyse asymptotique

**Exercice 29.** ●○○ Classer les suites suivantes par ordre de négligeabilité.

$$a_n = n^3, \quad b_n = 4n - n^3, \quad c_n = ne^{3n}, \quad d_n = \sin \frac{1}{n}, \quad f_n = ne^n, \quad g_n = n^3 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad h_n = \frac{n^4 - n^2}{\sqrt{n} + \ln(n)}.$$

**Correction**

On a

$$d_n = o(g_n), \quad g_n \sim n^2 = o(h_n), \quad h_n = o(a_n), \quad a_n = O(b_n) \text{ et } b_n = O(a_n), \quad a_n = o(f_n), \quad f_n = o(c_n),$$

**Exercice 30.** ●●○ Déterminer, à l'aide des relations de domination, de négligeabilité, et d'équivalence, les limites des suites suivantes

1.  $n(\sqrt[3]{n+\pi} - \sqrt[3]{n})$

2.  $\frac{\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(3n)}{\sin \frac{1}{n}}$

3.  $\frac{\sqrt{1 + \sin \frac{1}{n}} - 1}{e^{1+\frac{1}{n}} - e}$

4.  $\sin\left(\tan \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times (1 + 3\sqrt{n})^2$

5.  $\frac{n^n}{(n+1)^n}$

6.  $\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$

**Exercice 31.** Une suite définie implicitement. ●●●

1. Montrer que sur chacun des intervalles  $\left] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , l'équation  $\tan(x) = x$  admet une unique solution  $x_n$ .

**Correction**

Sur  $\left] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$ , la fonction  $x \mapsto \tan(x) - x$  est continue, strictement croissante car de dérivée égale à  $\tan^2$ , et de limite égale à  $+\infty$  (respectivement  $-\infty$ ) en  $\frac{\pi}{2} + n\pi$  (respectivement  $\frac{\pi}{2} - n\pi$ ). Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone aux limites, la fonction  $x \mapsto \tan(x) - x$  admet un unique zéro dans  $\left] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$ .

2. Donner un équivalent simple de  $x_n$ .

**Correction**

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $-\frac{\pi}{2} + n\pi \leq x_n \leq \frac{\pi}{2} + n\pi$ , donc

$$-\frac{1}{2n} + 1 \leq \frac{x_n}{\pi n} \leq 1 + \frac{1}{2n}.$$

Donc, par théorème d'encadrement,  $\frac{x_n}{\pi n} \xrightarrow{+\infty} 1$ , i.e.  $x_n \sim n\pi$ .

3. On pose  $y_n = \frac{\pi}{2} + n\pi - x_n$ .

- (a) Déterminer une équation vérifiée par  $y_n$ .

**Correction**

Calculons  $\tan(y_n)$  :

$$\begin{aligned} \tan(y_n) &= \tan\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - x_n\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right) \text{ car } \tan \text{ est } \pi - \text{périodique.} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right)} \\ &= \frac{\cos(x_n)}{\sin(x_n)} \\ &= \frac{1}{\tan(x_n)} \\ &= \frac{1}{x_n} \\ &\sim \frac{1}{n\pi} \xrightarrow{+\infty} 0. \end{aligned}$$

(b) En déduire que  $y_n \xrightarrow{+\infty} 0$ .

**Correction**

Donc  $\tan(y_n) \xrightarrow{+\infty} 0$ , et  $y_n$  est dans  $] -\pi/2, \pi/2[$ , donc  $y_n$  tend vers 0.

(c) Déterminer  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

**Correction**

On déduit de la question précédente que  $\tan(y_n) \sim y_n$ , donc  $\frac{1}{x_n} \sim y_n$ , donc  $\frac{1}{n\pi} \sim y_n$ ,  
i.e.  $y_n = \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ , donc  $\alpha = \frac{1}{\pi}$ .

**Indications**

- 8 Ce n'est pas si évident de faire un théorème d'encadrement, voilà pourquoi j'ai mis cet exercice dans les « epsiloneries » : prendre un  $\varepsilon$ , choisir correctement  $k$  puis  $n$ , ou bien  $n$  puis  $k$ . À vous de voir !
- 9 Calquer l'exercice fait en cours sur la règle de D'Alembert. Utiliser des  $\varepsilon$  et comparer à des suites géométriques.
- 10 (a) Non, considérer  $n + 2(-1)^n$ .  
(b) Reprendre la démonstration du théorème de la limite monotone en considérant l'ensemble des termes de la suite.  
(c) De même !
- 11 Tenter d'encadrer  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- 12 Repasser très précisément aux  $\varepsilon$ , et utiliser notamment le fait que  $b - v_n \geq 0$  pour tout  $n$ .
- 13 Penser à une étude de fonctions pour la première question, à un télescopage pour la seconde.
- 14 Penser : aux « quantités conjuguées » pour les racines, aux formes exponentielles, et aux encadrements pour les sommes. Les (iv), (v), (vii) sont à faire à la fin, beaucoup plus difficiles !
- 15 Déclarez bien vos variables.
- 16 Penser aux exemples vus en cours avec l'exponentielle.

- 17** (a) La suite est bornée...  
(b) Utiliser une formule de trigonométrie pour  $\cos(a + b)$ .  
(c) Utiliser une formule de trigonométrie pour  $\sin(a + b)$ , et penser que  $\cos^2 + \sin^2 = 1$ .
- ??** Penser à faire des encadrements :  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$  **et**  $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ . Penser que pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $\lfloor n \rfloor = n$ . Penser enfin que  $x \mapsto \lfloor x \rfloor$  est croissante.
- 18** Effectuer encore des encadrements.
- 19** Distinguer les cas  $\ell \in \mathbb{Z}$  et  $\ell \notin \mathbb{Z}$ . Penser que si  $\ell \notin \mathbb{Z}$ ,  $\exists \varepsilon > 0$ ,  $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$  ne contient aucun entier (le justifier).
- 20** Nier proprement les énoncés et construire des suites extraites comme en cours, par récurrence.
- 21** Faire de l'absurde... en supposant que  $q_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .
- montrer qu'il existe une sous-suite de  $(q_n)$  bornée.
  - montrer qu'il existe une sous-suite de  $(q_n)$  convergente.
  - montrer qu'il existe une sous-suite de  $(q_n)$  constante.
- 25** Toujours commencer par calculer les premiers termes, sauf si vous reconnaissez des suites vues en cours (arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2, etc.)
- 26** La bonne définition se montre par récurrence. Pour les limites, utiliser les règles sur la convergence.
- 27** Essayer d'étudier  $u_n + v_n$  et  $u_n - v_n$  et déterminer la limite de chacune de ces suites.
- 28** Utiliser le théorème de la limite monotone pour la 2. Pour la 3, factoriser par  $e^{u_n}$  et utiliser des taux de variation pour reconnaître une dérivée.
- 29** C'est du cours (croissances comparées). Penser à faire un équivalent avant de comparer !
- 31** (a) Utiliser le théorème de la bijection  
(b) Utiliser le théorème d'encadrement pour les équivalents.  
(c) Penser aux formules liant  $\tan(x)$  et  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .