 walter.ngambou@ac-versailles.fr

Test écrit du 15/11/2024

La rédaction importe moins que la démarche.

EDOS.

1. Résoudre $x' - 4x = 4$.

- L'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & ke^{4t} \end{array} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$.
- Une solution particulière de l'équation est la fonction $t \mapsto -1$.
- Donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -1 + ke^{4t} \end{array} \mid k \in \mathbb{R} \right\}.}$$

2. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} x'' - 2x + 5x = 10 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$

(En aparté : Je reconnais un problème de Cauchy associé à une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants. Pour le résoudre je procède comme suit.

(a) Je considère l'unique solution de ce problème de Cauchy.
(b) Je trouve l'ensemble des solutions de l'ED homogène associée.
(c) Je trouve une solution particulière de l'ED.
(d) Par théorème de structure, j'en déduis la forme de l'unique solution.
(e) Enfin, je détermine les constantes à l'aide des conditions initiales.

Aparté terminé !)

(a) Soit f l'unique solution de ce problème de Cauchy.
(b) On a
$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \alpha^2 - 2\alpha + 5 = 0 \Longleftrightarrow \alpha \in \{1 + 2i ; \overline{1 + 2i}\}$$
(c) Une solution particulière de l'ED est la fonction $t \mapsto 2$.
(d) Donc, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\begin{array}{rcl} f(t) & = & 2 + e^t(\lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)) \\ f'(t) & = & e^t((\lambda + 2\mu)\cos(2t) + (-2\lambda + \mu)\sin(2t)) \end{array}.$$
(e) Or $f(0) = 1$; donc $2 + \lambda = 1$; donc $\underline{\lambda = -1}$.
Or $f'(0) = 1$; donc $-1 + 2\mu = 1$; donc $\underline{\mu = 1}$.

Réponse :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 2 + e^t(-\cos(2t) + \sin(2t)) \end{array} \right\}.}$$

 walter.ngambou@ac-versailles.fr

Logique.

(a) Montrer que : $(0=1) \Longrightarrow (\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x = y)$.

(En aparté : quand je dis "Si Bernard est alité à l'hôpital alors Bernard est malade", que Bernard soit en train de jouer au tennis ne fait pas que j'ai dit faux, mais seulement qu'il soit alité à l'hôpital et qu'il ne soit pas malade.
Formellement, pour toutes propositions P et Q, on a : $P \Rightarrow Q$ est fausse si P est vraie et Q est fausse ; et $P \Rightarrow Q$ est vraie sinon (c'est-à-dire si P est fausse ou Q est vraie).)

Réponse : Comme $(0=1)$ est fausse, l'implication est vraie.

(b) On suppose que la proposition Pest vraie ainsi que les propositions suivantes :

- $(S \wedge Q) \Rightarrow \neg P$.
- $(\neg Q \wedge P) \Rightarrow \neg S$.
- $P \Rightarrow (R \vee S)$.
- $\neg Q \Rightarrow (R \wedge S)$.

Indiquer les valeurs de vérités de P, Q, R et S dans le tableau suivant :

P	Q	R	S
V	V	V	F

On a successivement les conséquences suivantes :

(1°) P **est vraie** ;
Donc $\neg P$ est fausse.

(2°) $\neg P$ est fausse ;
Or $(S \wedge Q) \Rightarrow \neg P$ est vraie ;
Donc $S \wedge Q$ est fausse.

(3°) P est vraie ;
Donc $\neg Q \wedge P$ est équivalente à $\neg Q$;

(4°) $\neg Q \wedge P$ est équivalente à $\neg Q$;
Or $(\neg Q \wedge P) \Rightarrow \neg S$ est vraie ;
Donc $S \Rightarrow Q$ est vraie.

(5°) $S \Rightarrow Q$ est vraie ;
Or $S \wedge Q$ est fausse ;
Donc S **est fausse**.

(6°) $P \Rightarrow (R \vee S)$ est vraie ;
Or P est vraie ;
Donc $R \vee S$ est vraie.

(7°) $R \vee S$ est vraie ;
Or S est fausse ;
Donc R **est vraie**.

(8°) R est vraie ;
Or S est fausse ;
Donc $R \wedge S$ est fausse.

(9°) $R \wedge S$ est fausse ;
Or $\neg Q \Rightarrow (R \wedge S)$ est vraie
Donc $\neg Q$ est fausse.

(10°) $\neg Q$ est fausse.
Donc Q **est vraie**.