Exercices d'assimilation sur les relations binaires

1 Relations d'équivalence

Exercice 1. (Manipulation 1)
On désigne par E l'ensemble des parties de $\{0;1\}$.

1. Dresser la table des valeurs (de la fonction indicatrice sur $E \times E$) de la relation d'égalité des cardinaux sur E.
2. Dessiner le graphe orienté de cette relation.

Exercice 2. (Manipulation 2)
Dessiner le graphe orienté de la congruence modulo 3 sur l'ensemble $[\![0;9]\!]$. *On simplifiera le graphe en omettant les flèches de réflexivité et les flèches de transitivité.*

Exercice 3. (Congruence modulo un sous-groupe)
Soit G une partie de la droite réelle $\mathbb{R}$ qui possède 0 et qui est stable par opposition et par addition (*On dit que G est un sous-groupe additif de* $\mathbb{R}$.). On définit sur $\mathbb{R}$ la relation de congruence modulo G, notée $\equiv_G$, par :

$$x \equiv_G y \quad \overset{def.}{\iff} \quad \exists g \in G \; x + g = y \quad \overset{def.}{\iff} \quad -x + y \in G$$

Vérifier que $\equiv_G$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. (Relations d'équivalence de référence)
Soit E un ensemble non vide.

1. Soient F un ensemble non vide et $f \in F^E$. On considère la relation d'égalité pour la fonction f, notée $=_f$, définie sur E par :

   $$x =_f y \qquad \overset{def.}{\iff} \qquad f(x) = f(y).$$

   Vérifier que $=_f$ est une relation d'équivalence sur E.
2. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de parties de E qui est une partition de E. On considère la relation d'équivalence pour la partition $\mathcal{P}$, notée $\sim_{\mathcal{P}}$, définie sur E par :

   $$x \sim_{\mathcal{P}} y \qquad \overset{def.}{\iff} \qquad \exists C \in \mathcal{P} \quad (x \in C) \land (y \in C)$$

   Vérifier que $\sim_{\mathcal{P}}$ est une relation d'équivalence sur E.
3. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalnce sur E.
   (b) Il existe une fonction f partant de E telle que $\mathcal{R}$ coïncide avec l'égalité pour f.
   (c) Il existe une partition $\mathcal{P}$ de E telle que $\mathcal{R}$ coïncide avec l'équivalence pour $\mathcal{P}$.

Exercice 5. (Relation d'équivalence et cardinaux)
Soient E un ensemble non vide, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Soit S une partie de E.
On suppose que E est fini et que toute classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$ est représentée par exactement un élément de S (*on dit que S est un système de représentants des classes d'équivalence pour* $\mathcal{R}$).
Trouver une relation entre le nombre $\mathrm{card}(E)$ et les nombres $\mathrm{card}(\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x))$, pour x parcourant S.

2 Relations d'ordre

Exercice 6. (Manipulation 3)
On désigne par E l'ensemble des parties de $\{0;1\}$.

1. Dresser la table des valeurs (de la fonction indicatrice sur $E \times E$) de la relation d'inclusion sur E.
2. Dessiner le graphe orienté de cette relation.

Exercice 7. (Manipulation 4)
Dessiner le graphe orienté de l'ordre de divisibilité sur l'ensemble $[\![0;9]\!]$. *On simplifiera le graphe en omettant les flèches de réflexivité et les flèches de transitivité.*

Exercice 8. (Ordre et division euclidienne)
Soit b un entier naturel supérieur à 2. On désigne par E l'ensemble $\mathbb{N} \times [\![0;b-1]\!]$. Soit f la fonction de E dans $\mathbb{N}$ définie par $f(q,r) = bq + r$. Montrer que

$$\forall (q,r),(q',r') \in E \qquad f(q,r) \leqslant f(q',r') \quad \Longleftrightarrow \quad (q < q') \ \vee \ ((q = q') \ \wedge \ (r \leqslant r')).$$

Exercice 9. (Ordre total sur $\mathbb{C}$)

1. a. On considère sur $\mathbb{R}^2$ l'ordre produit défini par :

$$(a,b) \leqslant (a',b') \quad \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \quad (a \leqslant a') \ \wedge \ (b \leqslant b').$$

   Vérifier qu'il s'agit d'une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle partielle ou totale ?

   b. On considère sur $\mathbb{R}^2$ l'ordre lexicographique défini par :

$$(a,b) \leqslant_l (a',b') \quad \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \quad (a < a') \ \vee \ ((a = a') \ \wedge \ (b \leqslant b')).$$

   Vérifier qu'il s'agit d'une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle partielle ou totale ?

2. a. En déduire un ordre $\preceq$ sur $\mathbb{C}$ qui soit total.

   b. Ranger les complexes 0, 1, -1 et i suivant l'ordre $\preceq$.

   c. Les trois assertions suivantes sont-elles toutes vérifiées ?

   (1) $0 \preceq 1$.

   (2) $\forall u, v \in \mathbb{C}, \quad u \preceq v \ \Leftrightarrow \ 0 \preceq v - u$.

   (3) $\forall u, v \in \mathbb{C}, \quad (0 \preceq u) \wedge (0 \preceq v) \ \Rightarrow \ 0 \preceq uv$.

Exercice 10.
Soit E un ensemble non vide. Soient A et B deux parties de E.

1. L'ensemble $\mathcal{U}$ des parties de E contenant à la fois A et B est-il non vide ? Possède-t-il un plus petit élément ? Possède-t-il un plus grand élément ?
2. Même questions pour l'ensemble $\mathcal{I}$ des parties de E contenues à la fois dans A.