Exercices d'assimilation sur les relations binaires

1 Relations d'équivalence

Exercice 1. (*Manipulation 1*)
On désigne par E l'ensemble des parties de $\{0;1\}$.

1. Dresser une table des valeurs (de la fonction indicatrice sur $E \times E$) de la relation d'égalité des cardinaux sur E (*"est de même cardinal que"*).
2. Dessiner un graphe orienté de cette relation.

Voici une table des valeurs numériques de la proposition $(\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B))$ pour (A, B) parcourant $E \times E$.

(A,B)	ϕ	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0\,;1\}$
ϕ	1	0	0	0
$\{0\}$	0	1	1	0
$\{1\}$	0	1	1	0
$\{0\,;1\}$	0	0	0	1

Exercice 2. (*Manipulation 2*)
Dessiner un graphe orienté de la congruence modulo 3 sur l'ensemble $[\![0;9]\!]$. *On simplifiera le graphe en omettant les flèches de réflexivité et les flèches de transitivité.*

Pour la congrmence modulo 3, on a le graphe orienté suivant.
$(2) \longleftrightarrow (5) \longleftrightarrow (8)$
$(1) \longleftrightarrow (4) \longleftrightarrow (7)$
$(0) \longleftrightarrow (3) \longleftrightarrow (6) \longleftrightarrow (9)$

Exercice 3. (*Congruence modulo un sous-groupe*)
Soit G une partie de la droite réelle $\mathbb{R}$ qui possède 0 et qui est stable par opposition et par addition (*on dit que G est un sous-groupe additif de* $\mathbb{R}$). On définit sur $\mathbb{R}$ la relation de congruence modulo G, notée $\equiv_G$, par :

$$x \equiv_G y \quad \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \quad \exists g \in G \; x + g = y \quad \Longleftrightarrow \quad -x + y \in G$$

Vérifier que $\equiv_G$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

Soient x, y et z dans $\mathbb{R}$.

- Réflexivité. On a
$$0 \in G \quad \text{et} \quad x + 0 = x.$$
Donc
$$x \equiv_G x.$$
- Symétrie. Je suppose que
$$x \equiv_G y.$$

Soit g dans G tel que

$$x + g = y.$$

Alors

$$-g \in G \quad \text{et} \quad y + (-g) = x.$$

Donc

$$y \equiv_G x.$$

- Transitivité. Je suppose que

$$x \equiv_G y \quad \text{et} \quad y \equiv_G z.$$

Soient g_1 et g_2 dans G tels que

$$x + g_1 = y \quad \text{et} \quad y + g_2 = z.$$

Alors

$$g_2 + g_2 \in G \quad \text{et} \quad x + (g_1 + g_2 = z.$$

Donc

$$x \equiv_G z.$$

Réflexive, symétrique et transitive, $\equiv_G$ est une relation d'équivalence.

Exercice 4. (*Relations d'équivalence de référence*)
Soit E un ensemble non vide.

1. Soient F un ensemble non vide et $f \in F^E$. On considère la relation d'égalité pour la fonction f, notée $=_f$, définie sur E par :

$$x =_f y \quad \overset{def.}{\iff} \quad f(x) = f(y).$$

Vérifier que $=_f$ est une relation d'équivalence sur E.

Soient x, y et z dans E.

- Réflexivité. On a $f(x) = f(x)$.
- Symétrie. Si $f(x) = f(y)$ alors $f(y) = f(x)$.
- Transitivité. Si $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$ alors $f(x) = f(z)$.

Réflexive, symétrique et transitive, $=_f$ est une relation d'équivalence.

2. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de parties de E qui est une partition de E. On considère la relation d'équivalence pour la partition $\mathcal{P}$, notée $\sim_{\mathcal{P}}$, définie sur E par :

$$x \sim_{\mathcal{P}} y \quad \overset{def.}{\iff} \quad \exists C \in \mathcal{P} \quad (x \in C) \wedge (y \in C)$$

Vérifier que $\sim_{\mathcal{P}}$ est une relation d'équivalence sur E.

Soient x, y et z dans E.

- Réflexivité. Les composantes de la partition $\mathcal{P}$ recouvrent E. Donc, soit $C \in \mathcal{P}$ tel que

$$x \in C.$$

Alors

$$(x \in C) \wedge (x \in C).$$

Donc

$$x \sim_{\mathcal{P}} x.$$

- Symétrie. Je suppose que

$$x \sim_{\mathcal{P}} y.$$

Soit C dans $\mathcal{P}$ tel que

$$(x \in C) \wedge (y \in C).$$

Alors

$$C \in \mathcal{P}, \quad (y \in C), \quad (x \in C).$$

Donc

$$y \sim_{\mathcal{P}} x.$$

- Transitivité. Je suppose que

$$x \sim_{\mathcal{P}} y \quad \text{et} \quad y \sim_{\mathcal{P}} z.$$

Soient C_1 et C_2 dans $\mathcal{P}$ tels que

$$(x \in C_1) \wedge (y \in C_1) \quad \text{et} \quad (y \in C_2) \wedge (z \in C_2).$$

Alors

$$y \in C_1 \cap C_2.$$

Donc

$$C_1, C_2 \in \mathcal{P} \quad \text{et} \quad C_1 \cap c_2 \neq \emptyset.$$

Or $\mathcal{P}$ est ume partition de E, donc

$$C_1 = C_2.$$

Ainsi, on a trouvé $C = C_1$ tel que

$$C \in \mathcal{P}, \quad (x \in C), \quad (z \in C).$$

Donc

$$x \sim_{\mathcal{P}} z.$$

3. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalnce sur E.
   (b) Il existe une fonction f partant de E telle que $\mathcal{R}$ coïncide avec l'égalité pour f.
   (c) Il existe une partition $\mathcal{P}$ de E telle que $\mathcal{R}$ coïncide avec l'équivalence pour $\mathcal{P}$.

(1°) Je suppose que (a) est fausse. Alors d'après 1 . et 2., (b) et (c) sont fausses.

(2°) Je suppose que (a) est vraie. Je montre que (b) et (c) sont vraies.

- Je définis $f : E \to P(E)$ par :

$$f(x) = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x).$$

Alors, pour tous x et y dams E,

$$x \overset{\mathcal{R}}{\leftrightarrow} y \quad \Longleftrightarrow \quad x =_f y.$$

Donc (b) est vraie.

- Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$. Comme $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E, $\mathcal{P}$ est une partition de E.

Je montre que $\mathcal{R}$ et $\sim_{\mathcal{P}}$ coïncident.

Soient x et y dans E.

— Je suppose que

$$x \overset{\mathcal{R}}{\leftrightarrow} y.$$

Je pose

$$C = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x).$$

Alors,

$$C \in \mathcal{P}, \quad (x \in C) \wedge (y \in C)$$

(par réflexivité de $\mathcal{R}$ et par définition de $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x)$).

D'où

$$x \sim_{\mathcal{P}} y.$$

— Réciproquement, je suppose que

$$x \sim_{\mathcal{P}} y.$$

Alors soit C dans $\mathcal{P}$ tel que

$$(x \in C) \wedge (y \in C).$$

Soit z dans E tel que

$$C = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(z).$$

Alors, par définition des classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$,

$$z \overset{\mathcal{R}}{\leftrightarrow} x \quad \text{et} \quad z \overset{\mathcal{R}}{\leftrightarrow} y.$$

D'où

$$x \overset{\mathcal{R}}{\leftrightarrow} y$$

(car $\mathcal{R}$ est symétrique et transitive).

Alors, pour tous x et y dams E,

$$x \overset{\mathcal{R}}{\leftrightarrow} y \quad \Longleftrightarrow \quad x \sim_{\mathcal{P}} y.$$

Donc (c) est vraie.

(3°) En somme, les trois propositions sont équivalentes (toutes vraies ou toutes fausses).

Exercice 5. (*Relation d'équivalence et cardinaux*)
Soient E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Soit S une partie de E. On suppose que E est fini et que toute classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$ est représentée par exactement un élément de S (*on dit que S est un système de représentants des classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$*). Trouver une relation entre le nombre $\text{card}(E)$ et les nombres $\text{card}(\text{cl}_{\mathcal{R}}(x))$, pour x parcourant S.

Lorsque x parcourt tout l'ensemble S, $\text{cl}_{\mathcal{R}}(x)$ parcourt tout l'ensemble des classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$ et sans répétition. Or ces classes constituent ume partition de E dorc un recourrement disjoint de E. Ainsi

$$\text{Card}(E) = \sum_{x \in S} \text{Card}(\text{cl}_{\mathcal{R}}(x))$$

Version MP/MP* :
$E/\mathcal{R}$ est un recouvrement disjoint de l'ensemble fini E, donc

$$\text{Card}(E) = \sum_{C \in E/\mathcal{R}} \text{Card}(C)$$

Or $S \ni x \mapsto \text{cl}_{\mathcal{R}}(x) \in E/\mathcal{R}$ est une bijection de S sur $E/\mathcal{R}$;
Donc

$$\text{Card}(E) = \sum_{x \in S} \text{Card}(\text{cl}_{\mathcal{R}}(x))$$

2 Relations d'ordre

Exercice 6. (*Manipulation 3*)
On désigne par E l'ensemble des parties de $\{0;1\}$.

1. Dresser une table des valeurs (de la fonction indicatrice sur $E \times E$) de la relation d'inclusion sur E.
2. Dessiner un graphe orienté de cette relation.

Voici une table des valuurs de la proposition $(A \subset B)$ pour (A, B) parcourant $E \times E$.

(A, B)	ϕ	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0;1\}$
ϕ	1	1	1	1
$\{0\}$	0	1	0	1
$\{1\}$	0	0	1	1
$\{0;1\}$	0	0	0	1

Exercice 7. (*Manipulation 4*)
Dessiner le graphe orienté de l'ordre de divisibilité sur l'ensemble $[\![0;9]\!]$. *On simplifiera le graphe en omettant les flèches de réflexivité et les flèches de transitivité.*

Exercice 8. (*Ordre et division euclidienne*)
Soit b un entier naturel supérieur à 2. On désigne par E l'ensemble $\mathbb{Z}\times[\![0;b-1]\!]$. Soit f la fonction de E dans $\mathbb{Z}$ définie par $f(q,r)=bq+r$. Montrer que

$$\forall (q,r),(q',r')\in E \qquad f(q,r)\leqslant f(q',r') \quad\Longleftrightarrow\quad (q<q')\ \vee\ ((q=q')\ \wedge\ (r\leqslant r')).$$

Soient (q,r) et (q',r') dans $\mathbb{Z}\times[\![0,b-1]\!]$. On a

$$bq+r\leqslant bq'+r' \Leftrightarrow -(q'-q)\leqslant \frac{r'-r}{b}$$

(car $b>0$).

(1°) Implication réciproque.

- Je suppose $q<q'$.
  Alors
  $$q'-q\geqslant 1$$
  (car $q'-q\in\mathbb{Z}$).
  Or
  $$\frac{r'-r}{b}>\frac{0-b}{b}\geqslant -1$$
  (car $r'\geqslant 0$, $-r>-b$, et $b>0$).

  Donc
  $$-(q'-q)\leqslant -1<\frac{r'-r}{b}.$$
  Donc
  $$-(q'-q)\leqslant \frac{r'-r}{b}.$$
- Je suppose $q=q'$ et $r\leqslant r'$.
  Alors $-(q'-q)\leqslant 0\leqslant \frac{r'-r}{b}$.
  Donc
  $$-(q'-q)\leqslant \frac{r'-r}{b}$$
- Ainsi,
  $$(q<q')\vee(q=q'\wedge r\leqslant r') \quad\Longrightarrow\quad bq+r\leqslant bq'+r'.$$

(2°) Implication directe. Je suppose que

$$-(q'-q)\leqslant \frac{r'-r}{b}.$$

Alors, comme

$$\frac{r'-r}{b}<\frac{b-0}{b}\leqslant 1.$$

On a

$$-(q'-q)<1.$$

Donc

$$-(q'-q)\leqslant 0.$$

- Je suppose que
$$-(q'-q)<0.$$
Alors
$$q<q'.$$
- Autrement, $-(q'-q)=0$.
Alors
$$0\leqslant \frac{r'-r}{b}.$$
Donc
$$r\leqslant r'.$$

D'où
$$(q<q')' \times (q'\leqslant q' \wedge r\leqslant r').$$

Exercice 9. (*Ordre total sur* $\mathbb{C}$)

1. a. On considère sur $\mathbb{R}^2$ l'ordre produit défini par :
$$(a,b)\leqslant (a',b') \quad \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \quad (a\leqslant a') \ \wedge \ (b\leqslant b').$$
Vérifier qu'il s'agit d'une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle partielle ou totale ?

Soient (a,b), (a',b') et (a'',b'') dans $\mathbb{R}^2$.

— Réflexivité. Comme $\leqslant$ (l'ordre usuel) est réflexif,
$$(a\leqslant a)\wedge(b\leqslant b).$$
Donc
$$(a,b)\leqslant_\pi (a,b).$$

— Antisymétrie. Je suppose que
$$(a,b)\leqslant_\pi (a',b') \quad \text{et} \quad (a',b')\leqslant_\pi (a,b).$$
Alors
$$a\leqslant a' \quad \text{et} \quad a'\leqslant a.$$
Or l'ordre usuel est antisymétrique ; donc
$$a=a'.$$
De même,
$$b=b'.$$
D'où
$$(a,b)=(a',b').$$

— Transitivité. Je suppose que

$$(a,b) \leqslant_\pi (a',b') \quad \text{et} \quad (a',b')' \leqslant_\pi (a''b'')\,.$$

Alors

$$a \leqslant a' \quad \text{et} \quad a' \leqslant a''.$$

Or l'ordre usuel est transitif ; donc

$$a \leqslant a''.$$

De même,

$$b \leqslant b''.$$

D'où

$$(a,b) \leqslant_\pi (a''b'')\,.$$

Réflexive, antisymétrique et transitive, la relation d'ordre produit est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.

Je montre à présent que $\leqslant_\pi$ ordonne partiellement $\mathbb{R}^2$.

On a $(1,0)$ et $(0,1)$ dans $\mathbb{R}^2$. Or les deux propositions $((1 \leqslant 0) \wedge (0 \leqslant 1))$ et $(0 \leqslant 1) \wedge (1 \leqslant 0)$ sont fausses.

Donc $(1,0)$ et $(0,1)$ ne sont pas comparables pour $\leqslant$.

b. On considère sur $\mathbb{R}^2$ l'ordre lexicographique défini par :

$$(a,b) \leqslant_l (a',b') \quad \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \quad (a < a') \ \vee \ ((a = a') \ \wedge \ (b \leqslant b')).$$

Vérifier qu'il s'agit d'une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle partielle ou totale ?

Soient (a,b), (a',b') et (a'',b'') dans $\mathbb{R}^2$.

— Réflexivité. On a

$$(a = a) \wedge (b \leqslant b)$$

Donc

$$(a,b) \leqslant_l (a,b)$$

— Antisymétrie. Je suppose que

$$(a,b) \leqslant_l (a',b') \quad \text{et} \quad (a',b') \leqslant_l l(a,b).$$

Conme $\quad (a,b) \leqslant_l (a',b')$, on a

$$a < a' \quad \text{ou} \quad a = a'$$

C'est que

$$a \leqslant a'.$$

De même

$$a' \leqslant a.$$

Donc
$$a = a'.$$

Comme
$$(a,b) \leqslant_l (a',b') \quad \text{et} \quad a = a'$$

On a
$$b \leqslant b'.$$

De même,
$$b' \leqslant b.$$

Donc
$$b = b'.$$

D'où
$$(a,b) = (a',b')$$

— Transitivité. Je suppose que

$$(a,b) \leqslant_l (a',b') \quad \text{et} \quad (a',b') \leqslant_l (a''b').$$

Je vise à montrer que $(a,b) \leqslant l\,(a'',b'')$.
Comme plus haut, on a
$$a \leqslant a' \quad \text{et} \quad a' \leqslant a''.$$

Or $\leqslant$ est tramaitive ; donc
$$a \leqslant a''.$$

C'est que
$$a < a'' \quad \text{ou} \quad a = a''.$$

Je suppose que $a = a''$.
Comme plus haut,
$$a \leqslant a' \quad \text{et} \quad a' \leqslant a''$$

C'est que
$$a \leqslant a' \quad \text{et} \quad a' \leqslant a$$

Or l'ordre usuel est ántisymétrique, donc $a = a'$ puis $a' = a''$.
Or
$$(a,b) \leqslant_l (a',b') \quad \text{et} \quad a = a'$$

Donc
$$b \leqslant b'.$$

.
De même
$$b' \leqslant b''.$$

Donc
$$b \leqslant b''.$$

Ainsi,

$$(a < a'') \vee ((a = a'') \wedge (b \leqslant b''))\,.$$

Réflexive, antisymétrique et trasitive, $\leqslant_l$ est un ordre sur $\mathbb{R}^2$.

Je montre à présent que $\leqslant l$ ordonne totalement $\mathbb{R}^2$.

Soient (a, b) et (a', b') dans $\mathbb{R}^2$.

Plusieurs cas.

- Cas 1° : Je suppose $a < a'$. Alors $(a, b) \leqslant_l (a', b')$.
- Cas 2° : Autrement, je suppose $a' < a$. Alors $(a', b') \leqslant_l (a, b)$.
- Cas 3° : Autrement, je suppose $a = a'$ et $b \leqslant b'$. Alors $(a, b) S_e (a', b')$.
- Cas 4° : Autrement, $a = a'$ et $b' < b$. Alors $(a', b') \leqslant l(a, b)$.

Bilan des cas : En tous les cas, (a, b) et (a', b') sont comparables pour $\leqslant_l$.

2. a. En déduire un ordre $\preceq$ sur $\mathbb{C}$ qui soit total.

Je definis $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$f(z) = (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$$

Je définis la relation $\preceq$ sur $\mathbb{C}$ par

$$\begin{aligned} z \preceq z' &\overset{def.}{\Leftrightarrow} f(z) \leqslant_l f(z') \\ &\Leftrightarrow (\mathrm{Re}(z) < \mathrm{Re}\,(z')) \vee ((\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}\,(z')) \wedge (\mathrm{Im}(z) \leqslant \mathrm{Im}\,(z'))) \end{aligned}$$

Alors, cormme $\leqslant_l$ est un ordre total sur $\mathbb{R}^2$ et comme f est une injection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}^2$, $\preceq$ est un ordre total sur $\mathbb{C}$.

b. Ranger les complexes 0, 1, -1 et i suivant l'ordre $\preceq$.

On a

$$-1 \preceq 0 \preceq i \preceq 1.$$

c. Les trois assertions suivantes sont-elles toutes vérifiées ?

(1) $0 \preceq 1$.

(2) $\forall u, v \in \mathbb{C}, \quad u \preceq v \;\Leftrightarrow\; 0 \preceq v - u$.

(3) $\forall u, v \in \mathbb{C}, \quad (0 \preceq u) \wedge (0 \preceq v) \;\Rightarrow\; 0 \preceq uv$.

Pour $u = i$ et $v = i$, la proposition $(0 \leqslant u) \wedge (0 \leqslant v)$ est vraie mais le propostion $0 \preceq uv)$ est fausse.

Donc la condition (3) n'est pas satisfaite.

Réponse : Non !

- Existe-t-il un ordre total sur $\mathbb{C}$ qui satisfait aux trois conditions de la question 2.c. ?

Je raisonne par l'absurde. Je suppose qu'un tel ordre existe. Je désigne par $\preceq$ un ordre total sur $\mathbb{C}$ qui satisfait aux conditions (1), (2) et (3) de 2.c..

- Je commence par le lemme suivant.

Lemme. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, $-a \preceq 0 \preceq a$ ou $a \preceq 0 \preceq -a$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{C}$.
Comme $\preceq$ est total, il compare a et 0.
Deux cas.
Cas 1° : Je suppose que $0 \preceq a$.
Alors $0 \preceq 0 - (-a)$.
Or (2) est satisfaite ; donc $-a \preceq 0$.

Cas 2° : Autrement, $a \preceq 0$.
Comme (2) est satisfaite ; $0 \preceq 0 - a$.
Donc $0 \preceq -a$.

Bilan des cas : Le lemme est démontré.

— Comme (1) est satisfaite, d'apreès le lemme,

$$-1 \leqslant 0$$

— Comme le lemme est vérifiée,

$$0 \preceq i \quad \text{ou} \quad 0 \preceq (-i)'$$

Or

$$-1 = i \times i \quad \text{et} \quad -1 = (-i) \times (-i)$$

Ainsi, on trouve au moins un couple (u, v) dans $\mathbb{C}^2$ tel que $((0 \preceq \mu) \wedge (0 \preceq v))$ est vraie mais $(0 \preceq uv)$ est fausse.

En somme, à l'inverse de la droite totalement ordonnée des nombres réels, le plan plan des nombres complexes ne peut-être muni d'un ordre total qui soit compatible avec les operations.

Exercice 10. (*p.p.e. et p.g.e.*)
Soit E un ensemble non vide. Soient A et B deux parties de E.

1. L'ensemble $\mathcal{U}$ des parties de E contenant à la fois A et B est-il non vide ? Possède-t-il un plus petit élément ? Possède-t-il un plus grand élément ?
   L'ensemble $\mathcal{U}$ possède $A \cup B$ et E. Donc Donc il n'est pas vide. De plus $A \cup B$ et E sont respectivement son plus petit élément et son plus grand élément.
2. Mêmes questions pour l'ensemble $\mathcal{I}$ des parties de E contenues à la fois dans A et dans B.
   L'ensemble $\mathcal{I}$ possède $\emptyset$ et $A \cap B$. Donc il n'est pas vide. De plus $\emptyset$ et $A \cap B$ sont respectivement son plis petit élément et son plus grand élément.