N.Laillet - W.Ngambou
walter.ngambou@ac-versailles.fr

DM 06
à rendre le lundi 18 novembre

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur $\mathrm{I} =]0, +\infty[$ suivante :

$$xy' + ny = \frac{1}{1+x^2} \qquad (E_n)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, définissons la fonction F_n par : $\forall x \geqslant 0, F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2} dt$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation différentielle linéaire homogène (H_n) associée à (E_n) :

$$xy' + ny = 0 \qquad (H_n)$$

Correction 1. L'équation différentielle s'écrit $y' + \frac{n}{x} y = 0$. Or, $\displaystyle\int^x \frac{n}{t} dt = n\ln(x)$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène est

$$\{x \mapsto \lambda e^{-n\ln(x)},\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto \frac{\lambda}{x^n},\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

2. Résoudre (E_0).
On pourra chercher des réels a, b, c tels que : $\forall x > 0, \dfrac{1}{x(1+x^2)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{1+x^2}$

Correction 2. L'équation (E_0) s'écrit $y' = \dfrac{1}{x(1+x^2)}$. Or, $\dfrac{1}{x(1+x^2)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}$.
Comme

$$\int^x \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2),$$

l'ensemble des solutions de (E_0) est

$$\boxed{\left\{x \mapsto \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer l'ensemble des solutions de (E_n) à l'aide de la fonction de F_n.

Correction 3. L'ensemble des solutions de l'équation homogène a déjà été trouvé : il s'agit de

$$\{x \mapsto \frac{\lambda}{x^n},\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Soit désormais f une fonction quelconque. Notons $h : x \mapsto f(x).x^n$. Alors f est solution de (E_n) si, et seulement si,

$$h'(x) = x^n \times \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{x^{n-1}}{1+x^2}.$$

Or, F_n est une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^{n-1}}{1+x^2}$, donc $x \mapsto \dfrac{F_n(x)}{x^n}$ est une solution particulière de l'équation. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\left\{x \mapsto \frac{F_n(x)}{x^n} + \frac{\lambda}{x^n},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

4. Montrer que

$$\forall x \geqslant 0, F_n(x) = \frac{x^n}{n\,(1+x^2)} + \frac{2}{n}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{(1+t^2)^2}dt$$

Correction 4. Soient $u, v : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $u'(t) = t^{n-1}$, $v(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $u(t) = \frac{t^n}{n}$, $v'(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}$. Ainsi, par intégration par parties, on a le résultat désiré !

5. Démontrer que pour tout $x > 0$

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(1+t^2)^2}dt \leqslant x^{n+2}.$$

Correction 5. SOit $x \in]0;+\infty[$. Soit $t \in [0;x]$. On a $0 \leqslant t^{n+1} \leqslant x^{n+1}$ et $\leqslant 1+t^2 \geqslant 1 > 0$. Ainsi,

$$0 \leqslant \frac{t^{n+1}}{(1+t^2)^2} \leqslant x^{n+1}.$$

En intégrant les inégalités pour $t \in [0;x]$, le résultat apparaît.

6. En déduire qu'il existe une unique solution de (E_n) qui admet une limite finie en 0 (à préciser). On note cette solution z_n. Exprimer z_n en fonction de F_n et de x^n et démontrer que

$$\forall x > 0, z_n(x) = \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{1+x^2u^2}du$$

Correction 6. Déjà, par l'encadrement précédent, $\frac{F_n(x)}{x^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n}$. Ensuite, si z_n est une solution de (E_n) ayant une limite nulle en 0, on dispose de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, $z_n(x) = \frac{F_n(x)}{x^n} + \frac{\lambda}{x^n}$. Comme $\frac{F_n(x)}{x^n}$ possède une limite finie quand x tend vers 0, on en déduit que $\lambda = 0$. Donc nécessairement, $z_n(x) = \frac{F_n(x)}{x^n}$.
Réciproquement, une telle fonction est solution du problème.
Donc pour tout $x > 0$,

$$z_n(x) = \frac{1}{x^n}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2}dt.$$

Donc

$$z_n(x) = \frac{1}{x^n}\int_{x\times 0}^{x\times 1} \frac{t^{n-1}}{1+t^2}dt = \frac{1}{x^n}\int_0^1 \frac{x^{n-1}u^{n-1}}{1+(xu)^2}xdu. = \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{1+(xu)^2}du.$$

(On fait le changement de variables $t = xu$.
Quand $u = 0$, $t = 0$. Quand $u = 1$, $t = x$. Ensuite, $\frac{t^{n-1}}{1+t^2} = x^{n-1}\frac{u^{n-1}}{1+(ux)^2}$. Enfin, $dt = xdu$.)

7. Soit z une solution de (E_n) et Z une primitive de z. Montrer qu'il existe un réel C tel que Z soit solution de l'équation différentielle d'inconnue y : $xy' + (n-1)y = \operatorname{Arctan}(x) + C$.

Correction 7. Dérivons $f : x \mapsto xZ'(x) + (n-1)Z(x) - \operatorname{Arctan}(x)$: pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = Z' + xZ'' + (n-1)Z' - \frac{1}{1+x^2} = nZ' + xZ'' - \frac{1}{1+x^2} = nz + xz' - \frac{1}{1+x^2} = 0,$$

car z est solution de (E_n). Donc f est constante, d'où le résultat désiré !

N.Laillet - W.Ngambou
walter.ngambou@ac-versailles.fr

8. Démontrer que z_n admet une unique primitive de limite nulle en 0. On la note Z_n. Démontrer que $Z_n(1) = \dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{\pi}{4} - z_n(1)\right)$.

Correction 8. Déjà, z_n admet un prolongement continue sur $[0;+\infty[$. Donc $x \mapsto \displaystyle\int_0^x z_n(t)dt$ est l'unique primitive de z_n s'annulant en 0 (donc ayant une limite nulle en 0 ! !).
Comme $xz_n + (n-1)Z_n = \text{Arctan}(x) + C$, en évaluant en 0, on remarque que $C = 0$. De plus, en évaluant en 1, $(n-1)Z_n(1) = \dfrac{\pi}{4} - z_n(1)$, d'où le résultat désiré !

Exercice 2. *Bonus*. Déterminer l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x) + 2\displaystyle\int_0^x e^{x-t} f(t)dt$.

Correction 9. Analyse. Soit f une solution du problème. Alors pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \sin(x) + 2e^x \int_0^x e^{-t} f(t)dt.$$

Comme $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t} f(t)dt$ est dérivable, f est dérivable et pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) + 2e^x \int_0^x e^{-t} f(t)dt + 2e^x e^{-x} f(x) \\ &= \cos(x) + 2e^x \int_0^x e^{-t} f(t)dt + 2f(x) = \cos(x) + f(x) - \sin(x) + 2f(x), \end{aligned}$$

donc f vérifie

$$f'(x) - 3f(x) = \cos(x) - \sin(x).$$

Résolvons donc $y' - 3y = \cos(x) - \sin(x)$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\{x \mapsto \lambda e^{3x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Pour trouver une solution particulière, on cherche une solution sous la forme $g : x \mapsto h(x)e^{3x}$. Alors h est solution de

$$h'(x) = e^{-3x}(\cos(x) - \sin(x)).$$

On prend alors $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-3t}(\cos(t) - \sin(t))dt$. On fait une intégration par parties, en dérivant e^{-3t} et en intégrant $\cos(t) - \sin(t)$. Alors

$$h(x) = [e^{-3t}(\sin(t) + \cos(t))]_0^x + 3\int_0^x e^{-3t}(\sin(t) + \cos(t))dt.$$

Dans la deuxième intégrale, on pose à nouveau $u(t) = e^{-3t}$ et $v'(t) = \sin(t) + \cos(t)$. Alors

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-3t}(\sin(t) + \cos(t))dt &= [e^{-3t}(-\cos(t) + \sin(t))]_0^x + 3\int_0^x e^{-3t}(-\cos(t) + \sin(t))dt \\ &= e^{-3x}(\sin(x) - \cos(x)) + 1 - 3h(x), \end{aligned}$$

donc

$$h(x) = e^{-3x}(\sin(x) + \cos(x)) - 1 + 3e^{2x}(\sin(x) - \cos(x)) + 3 - 9h(x),$$

N.Laillet - W.Ngambou
walter.ngambou@ac-versailles.fr

donc

$$h(x) = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{3x}(2\sin(x) - \cos(x)) + \frac{1}{5}.$$

Changer la constante ne change pas le fait que l'on ait une primitive, donc une solution particulière de l'équation différentielle est $x \mapsto \frac{1}{5}(2\sin(x) - \cos(x))$.
Donc on dispose de λ dans $\mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{5}(2\sin(x) - \cos(x)) + \lambda\mathrm{e}^{-3x}$.
Comme $f(0) = 0$, $\lambda = \frac{1}{5}$, donc $f(x) = \frac{1}{5}(2\sin(x) - \cos(x)) + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-3x}$.

La **synthèse** est pour vous...