 walter.ngambou@ac-versailles.fr

DM 07
à rendre le lundi 25 novembre

Plan d'étude. En début de DM, merci de préciser la formule que vous avez choisie.

1. **Formule « bases ».** Problème 1, questions 1-7 (Questions 1,2 faites en classes) ! (2h)
2. **Formule « intermédiaire »** Problème 1 en entier. (3h)
3. **Formule « complète »** Problème 1 + exercices d'initiative. (3h+temps libre)

Problème 1. Autour de la convergence au sens de Cesàro

Dans tout l'énoncé, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ désigne une suite réelle, et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ désigne la suite définie par, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. On dit que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ **converge au cens de Cesàro** si $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Dans tout le problème, si besoin est, on pourra utiliser sans justification que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

A. De la convergence à la convergence au sens de Cesàro

A-I. La convergence implique la convergence au sens de Cesàro

1. Dans cette question, **on suppose que** $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$,
   $$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k\right) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k\right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.
2. Démontrer que lorsque la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ quelconque, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.

A-II. Application à l'étude d'une suite récurrente

On considère la suite définie par

$$x_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n}.$$

3. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $0 < x_n < 1$.
4. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
5. La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

Notons $a_1 = \dfrac{1}{x_1}$ et, pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = \dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{x_{n-1}}$. On note, pour tout $n \geqslant 1$, $b_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.

6. Montrer que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.
7. En utilisant la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ et la convergence au sens de Cesàro, démontrer que
$$n x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

 walter.ngambou@ac-versailles.fr

A-III. Différence des termes consécutifs

Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle quelconque.

8. On suppose que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Montrer que la suite $(x_{n+1}-x_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

9. On suppose que la suite $(x_{n+1}-x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un nombre réel ℓ.

(a) Montrer que la suite $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et préciser sa limite. *On pourra s'inspirer des méthodes des questions 6. et 7..*

(b) Étudier la convergence ou la divergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans le cas où $\ell \neq 0$.

(c) Dans le cas où $\ell = 0$, la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle nécessairement convergente ?

B. De la convergence au sens de Cesàro à la convergence

B-I. La réciproque du A-I. est fausse

Dans les deux questions suivantes, on pose, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

10. Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

11. Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ n'a pas de limite et conclure quant à la validitié de la réciproque de la proposition établie en A-I.

B-II. Une réciproque possible de la propriété A-I.

Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

12. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} \leqslant 2v_{2n} - v_n$.

13. Établir la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et préciser sa limite.

14. Énoncer la propriété ainsi démontrée sous la forme d'une condition nécessaire et suffisante.

Exercice 1. Donner un sens à l'égalité suivante et la démontrer :

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}.$$

Exercice 2. Soit x un irrationnel, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels convergeant vers x. On note $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ où $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ et $\mathrm{pgcd}(p_n, q_n) = 1$. Montrer que, nécessairement, $q_n \to +\infty$.
Attendre jeudi pour traiter cet exercice.