Programme de colles de mathématiques

Semaine du lundi 25 novembre 2024

Lycée Pasteur, MPSI1

Walter Ngambou

Thèmes

- *Relations binaires et nombres réels* . **(1)** Relation d'équivalence sur un ensemble quelconque : exemples, classes d'équivalence, égalité de deux classes d'équivalence, partition constituée des classes d'équivalence. **(2)** Relation d'ordre sur un ensemble quelconque : exemples, ensemble totalement ou partiellement ordonné, plus petit élément et plus grand élément (les notions de borne supérieure et de borne inférieure n'ont pas été vues dans le cas général). **(3)** La droite totalement ordonnée des réels : la droite numérique achevée totalement ordonnée, intervalles de la droite réelle et caractérisation, axiome du plus petit élément dans $\mathbb{N}$, propriétés du plus petit élément et du plus grand élément dans $\mathbb{Z}$ (admises), axiome de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, propriété de la borne inférieure dans $\mathbb{R}$, propriété d'Archimède, partie entière (par défaut), valeur décimale approchée par défaut d'un réel à la précision 10^{-p}, densité d'une partie de $\mathbb{R}$ et densité des trois parties $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- *Suites réelles* . **(1)** Généralites : Suites constantes, suites stationnaires ; Suites minorées, majorées, bornées, combinaisons linéaires et produit de deux suites bornées ; Suites monotones et caractérisation par comparaison de termes consécutifs (accroissement absolue dans le cas général, accroissement relatif dans le cas de suites à valeurs strictement positives) ; Sous-suites : exemples. **(2)** Limite d'une suite réelle : définition unifiée pour une limité dans $[-\infty, +\infty]$ et unicité. (b) Limite réelle (finie) : définitions équivalentes ; limite de $(1/n)_{n\geqslant 1}$, limite de $(q^n)_{n\geqslant 0}$, où $q \in]-1;1[$.

Exemples de questions de cours

1. Les classes d'équivalence constituent une partition de l'ensemble sous-jacent.
2. Deux exemples d'ensembles totalement ordonnés et deux exemples d'ensembles partiellement ordonnés. Justification.
3. Pour tout réel b, on a $\sup(]-\infty, b[) = b$.
4. Une partie A non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une bornée inférieure et $\inf(A) = -\sup(-A)$.
5. Propriété d'Archimède.
6. Définition de la partie entière (par défaut) d'un réel x : l'unique entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$.
7. Pour tout réel a, pour qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ soit égale à $x \mapsto ax$, il est suffisant que ces deux fonctions coïncident sur une partie dense de $\mathbb{R}$ et que la fonction f soit monotone.
8. Toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
9. Toute combinaison linéaire de deux suites réelles bornées est une suite réelle bornée, et le produit de deux suites réelles bornée est une suite réelle bornée.
10. Pour tout réel $q \in]-1;1[$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 (exemples : les suites réelles $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(10^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers 0).