

DM 07

à rendre le lundi 25 novembre

Plan d'étude. En début de DM, merci de préciser la formule que vous avez choisie.

1. **Formule « bases ».** Problème 1, questions 1-7 (Questions 1,2 faites en classes) ! (2h)
2. **Formule « intermédiaire »** Problème 1 en entier. (3h)
3. **Formule « complète »** Problème 1 + exercices d'initiative. (3h+temps libre)

Problème 1. Autour de la convergence au sens de Cesàro

Dans tout l'énoncé, $(u_n)_{n \geq 1}$ désigne une suite réelle, et $(v_n)_{n \geq 1}$ désigne la suite définie par, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$. On dit que $(u_n)_{n \geq 1}$ **converge au sens de Cesàro** si $(v_n)_{n \geq 1}$ converge.

Dans tout le problème, si besoin est, on pourra utiliser sans justification que si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$, alors $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

A. De la convergence à la convergence au sens de Cesàro

A-I. La convergence implique la convergence au sens de Cesàro

1. Dans cette question, **on suppose que** $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k \right) - \frac{\varepsilon}{2} \leq v_n \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k \right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Correction 1. On sait que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ donc on dispose de $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $n \geq n_0$. Alors

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} u_k + \frac{n_0}{n} \sum_{k=1}^n u_k.$$

Or, pour tout $k \geq n_0$, $-\frac{\varepsilon}{2} \leq u_k \leq \frac{\varepsilon}{2}$, donc

$$\frac{n_0}{n} \sum_{k=1}^n u_k - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{n_0}{n} \sum_{k=1}^n u_k \leq \frac{n_0}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{2},$$

c'est-à-dire que

$$-\frac{n - n_0 + 1}{n} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{n_0}{n} \sum_{k=1}^n u_k \leq \frac{n - n_0 + 1}{n} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, $\frac{n - n_0 + 1}{n} \leq 1$ donc $-\frac{\varepsilon}{2} \leq -\frac{n - n_0 + 1}{n} \frac{\varepsilon}{2}$ et $\frac{n - n_0 + 1}{n} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, d'où

$$\boxed{-\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{n_0}{n} \sum_{k=1}^n u_k \leq \frac{\varepsilon}{2},}$$

d'où

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k \right) - \frac{\varepsilon}{2} \leq v_n \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k \right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

(b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

Correction 2. Soit $\varepsilon > 0$. Par la question précédente, on dispose d'un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k \right) - \frac{\varepsilon}{2} \leq v_n \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k \right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais $\left(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k \right)$ est une somme finie indépendante de n , donc

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc on dispose de $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $-\frac{\varepsilon}{2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k \right) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $N = \max(n_0, n_1)$. Soit $n \geq N$. Alors $-\varepsilon \leq v_n \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

2. Démontrer que lorsque la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel ℓ quelconque, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ .

Correction 3. Posons pour tout n dans $\mathbb{N}$, $w_n = u_n - \ell$. Alors $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc, par la question précédente,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Mais, si $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - \ell) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) - \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \ell \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) - \ell.$$

Donc $\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) - \ell \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

A-II. Application à l'étude d'une suite récurrente

On considère la suite définie par

$$x_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} = \frac{x_n(1 + x_n)}{1 + 2x_n}.$$

3. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $0 < x_n < 1$.

Correction 4. Montrons ce résultat par récurrence.

Initialisation. On sait que $x_2 = \frac{x_1(1+x_1)}{1+2x_1} = \frac{1(1+1)}{1+2} = \frac{2}{3} \in]0, 1[$.

Hérédité. Supposons que pour un certain n , $x_n \in]0, 1[$.

Déjà, $x_n > 0$ donc $x_n(1+x_n) > 0$ et $1+2x_n > 0$, donc $x_{n+1} > 0$.

Ensuite, comme $x_n > 0$, $1+x_n < 1+2x_n$, donc $\frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n} < x_n$ donc $x_{n+1} < x_n < 1$.

D'où l'hérédité et le résultat : $\forall n \geq 2, x_n \in]0, 1[$.

4. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Correction 5. Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors, comme $x_n > 0$, $1+x_n < 1+2x_n$ donc $x_n \frac{1+x_n}{1+2x_n} < x_n$ donc $x_{n+1} < x_n$. Donc $(x_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante.

5. La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

Correction 6. La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante minorée donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge. Notons ℓ sa limite. Alors, $x_{n+1} = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell(1+\ell)}{1+2\ell}$. Or, $x_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ donc, par unicité de la limite,

$$\ell = \frac{\ell(1+\ell)}{1+2\ell},$$

donc (ATTENTION, ON NE PEUT PAS DIVISER PAR ℓ IMPUNÉMENT) :

- ou bien $\ell = 0$,
- ou bien $\ell \neq 0$, mais alors $1 = \frac{1+\ell}{1+2\ell}$, i.e. $1+2\ell = 1+\ell$, i.e. $\ell = 0$, contradiction.

Donc $\ell = 0$.

Notons $a_1 = \frac{1}{x_1}$ et, pour tout $n \geq 2$, $a_n = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}$. On note, pour tout $n \geq 1$, $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$.

6. Montrer que $(a_n)_{n \geq 1}$ converge vers 1.

Correction 7. Soit n dans $\mathbb{N}$, $n \geq 2$. Alors Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}} = \frac{1+2x_{n-1}}{x_{n-1}(1+x_{n-1})} - \frac{1}{x_{n-1}} \\ &= \frac{1+2x_{n-1}}{x_{n-1}(1+x_{n-1})} - \frac{1+x_{n-1}}{x_{n-1}(1+x_{n-1})} \\ &= \frac{1+2x_{n-1} - (1+x_{n-1})}{x_{n-1}(1+x_{n-1})} = \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}(1+x_{n-1})} = \frac{1}{1+x_{n-1}}. \end{aligned}$$

Mais $x_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

7. En utilisant la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ et la convergence au sens de Cesàro, démontrer que

$$nx_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Correction 8. Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors,

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k-1}} \right) + \frac{a_1}{n}.$$

Donc, par télescopage, $b_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_n} \right) = \frac{1}{nx_n}$. Mais, comme $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1, elle converge au sens de Cesàro, donc $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc $\frac{1}{nx_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc $\boxed{nx_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1}$.

A-III. Différence des termes consécutifs

Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle quelconque.

8. On suppose que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge. Montrer que la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n \geq 1}$ converge.

Correction 9. Notons ℓ la limite de $(x_n)_{n \geq 1}$. Alors $x_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. **Donc** $x_{n+1} - x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell - \ell = 0$.

9. On suppose que la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n \geq 1}$ converge vers un nombre réel ℓ .

(a) Montrer que la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge et préciser sa limite. On pourra s'inspirer des méthodes des questions 6. et 7..

Correction 10. Posons pour tout $n \geq 2$ $y_n = x_n - x_{n-1}$ et $y_1 = x_1$. Alors par télescopage,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = \frac{x_n}{n}.$$

Or, $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, donc, par la propriété de la convergence au sens de Cesàro, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$

ℓ , donc $\boxed{\frac{x_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell}$.

(b) Étudier la convergence ou la divergence de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ dans le cas où $\ell \neq 0$.

Correction 11. Si $\ell \neq 0$, on montre qu'elle tend vers $\pm\infty$, dépendamment du signe de ℓ .

Si $\ell > 0$, soit μ tel que $0 < \mu < \ell$. Alors, comme $\frac{x_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, on a, à partir d'un certain

rang, $\frac{x_n}{n} > \mu$, donc $x_n > \mu n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $\boxed{x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \text{ par minoration}}$.

De même, si $\ell < 0$, on montre que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

(c) Dans le cas où $\ell = 0$, la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est-elle nécessairement convergente ?

Correction 12. Pas nécessairement ! Elle peut l'être (par la première question, si (x_n) converge alors $(x_{n+1} - x_n)$ converge vers 0), mais si on prend $x_n = \ln(n)$, alors pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$x_{n+1} - x_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

B. De la convergence au sens de Cesàro à la convergence

B-I. La réciproque du A-I. est fausse

Dans les deux questions suivantes, on pose, pour tout $n \geq 1$, $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$.

10. Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$.

Correction 13. Soit n dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \\ &= \frac{1}{n} (-1) \frac{1 - (-1)^n}{1 - (-1)} \\ &= \frac{1}{n} \frac{(-1)^n - 1}{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$|v_n| = \frac{1}{2n} |(-1)^n - 1| \leq \frac{2}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

11. Démontrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ n'a pas de limite et conclure quant à la validité de la réciproque de la proposition établie en A-I.

Correction 14. $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1 et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite constante égale à -1 , donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède deux suites extraites qui convergent vers deux limites différentes, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite. Donc la réciproque de la proposition A-I. n'est pas vraie en général.

B-II. Une réciproque possible de la propriété A-I.

Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge.

12. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} \leq 2v_{2n} - v_n$.

Correction 15. Soit $n \geq 1$. Alors

$$2v_{2n} - v_n = 2 \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n} u_k - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$$

Par croissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a, pour tout k dans $[[n+1, 2n]]$, $u_k \geq u_{n+1}$. Donc

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_{n+1} = (2n - (n+1) + 1) u_{n+1} = n u_{n+1}.$$

Donc

$$2v_{2n} - v_n \geq u_{n+1}.$$

13. Établir la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ et préciser sa limite.

Correction 16. La convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'établit simplement, car $(2v_{2n} - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc est majorée, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc elle converge. Pour la limite, faisons un encadrement. Par croissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_k \leq u_n$. Donc, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_n \leq u_n.$$

Donc, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$v_n \leq u_n \leq 2v_{2n} - v_n.$$

Or, on suppose que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ , donc, comme (v_{2n}) est une suite extraite de (v_n) , elle converge aussi vers ℓ . Donc $2v_{2n} - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

On en déduit, par théorème d'encadrement, que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

14. Énoncer la propriété ainsi démontrée sous la forme d'une condition nécessaire et suffisante.

Correction 17. On vient donc de démontrer que pour toute suite croissante $(u_n)_{n \geq 1}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, alors $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers ℓ si, et seulement si $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u_k$ converge vers ℓ .

Exercice 1. Donner un sens à l'égalité suivante et la démontrer :

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}.$$

Exercice 2. Soit x un irrationnel, $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de rationnels convergeant vers x . On note $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ où $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $\text{pgcd}(p_n, q_n) = 1$. Montrer que, nécessairement, $q_n \rightarrow +\infty$.
Attendre jeudi pour traiter cet exercice.