1 Thèmes

1. *La droite totalement ordonnée des réels.*

   (1) La droite numérique achevée totalement ordonnée, intervalles de la droite réelle et caractérisation, axiome du plus petit élément dans $\mathbb{N}$, propriétés du plus petit élément et du plus grand élément dans $\mathbb{Z}$ (admises), axiome de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, propriété de la borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

   (2) Propriété d'Archimède, partie entière (par défaut), valeur décimale approchée par défaut d'un réel à la précision 10^{-p}, densité d'une partie de $\mathbb{R}$ et densité des trois parties $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2. *Suites réelles.*

   (1) Généralités : (a) Suites constantes, suites stationnaires ; Suites minorées, majorées, bornées. (b) Combinaisons linéaires et produit de deux suites bornées. (c) Suites monotones et caractérisation par comparaison de termes consécutifs (accroissement absolue dans le cas général, accroissement relatif dans le cas de suites à valeurs strictement positives). (d) Sous-suites : exemples.

   (2) Limite d'une suite réelle : (a) Définition unifiée pour une limité dans $[-\infty, +\infty]$ et unicité. (b) Limite réelle (finie) : définitions équivalentes ; limite de $(1/n)_{n\geqslant 1}$, limite de $(q^n)_{n\geqslant 0}$, où $q \in]-1;1[$. (c) Bornitude de toute suite convergente. (d) Limite infinie : limite de $(q^n)_{n\geqslant 0}$, où $q \in]1;+\infty[$. (e) Limite et sous-suites : sous-suites extraites d'une suite admettant une limite, les deux sous-suites des termes de rangs pairs et des termes de rangs impairs.

   (3) Calculs de limites par opérations et par inégalités : (a) Opérations sur les limites finies ou infinies (combinaisons linéaires, produit, quotient). (b) Passage à la limite dans les inégalités **larges** ; (c) Théorème d'encadrement (pour la convergence), théorème de minoration (pour la divergence vers $+\infty$) et théorème de majoration (pour la divergence vers $-\infty$).

   (4) Existence de limites : (a) Limite d'une suite réelle monotone : Théorème de la limite monotone et satellites. (b) Limite commune de deux suites adjacentes : théorème des suites adjacentes, application aux deux sous-suites des termes de rangs pairs et des termes de rangs impairs d'une même suite réelle. (c) Extraction de sous-suites convergentes : théorème de Bolzano-Weierstrass (*démonstration non exigible, mais procédé de dichotomie capital*).

 walter.ngambou@ac-versailles.fr

2 *Exemples* de questions de cours

1. Pour tout réel a, pour qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ soit égale à $x \mapsto ax$, il est suffisant que ces deux fonctions coïncident sur une partie dense de $\mathbb{R}$ et que la fonction f soit monotone.
2. Si une suite réelle (u_n) converge alors elle converge en moyenne de Césaro vers la même limite, i.e. $\left(\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ converge vers $\lim u$.
3. Pour qu'une suite réelle soit convergente il est nécessaire (et suffisant) que toutes ses sous-suites convergent vers une limite commune.
4. Pour qu'une suite réelle (u_n) soit convergente il est nécessaire et suffisant que ses sous-suites des termes de rangs pairs et des termes de rangs impairs converge vers une limite commune.
5. Somme de deux suites tendant vers 0 et produit d'une suite tendant vers 0 par une suite bornée.
6. Théorème de la limite monotone.
7. Pour toute suite c dans $[\![0, 9]\!]$ ne stationnant pas à la valeur 9, convergence de $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{p} c_k 10^{-k}\right)_{p\geqslant 1}$ et valeurs décimales approchées par défaut de la limite.
8. Théorème des suites adjacentes.

 walter.ngambou@ac-versailles.fr