MPSI 1

Mathématiques
DS 04 (4H 00)

Samedi 30 novembre – 8h-12h

Le sujet comporte 6 pages avec la page de garde. Il est composé de deux exercices et deux problèmes. Le résultat de l'exercice 1 peut-être utilisé pour traiter la question 8. du problème 1 et la question 3. du problème 2. L'exercice 2 et les deux problèmes sont indépendants entre eux.

Consignes aux aspirants aux grandes écoles :

1. Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
2. **Aucune couleur** n'est autorisée à l'exception du bleu et du noir.
3. Il est demandé de **numéroter** les écrits **page par page** en bas à droite.
4. Il est demandé d'indiquer **les numéros** ou étiquettes des questions dans la marge gauche.
5. Il est demandé de mettre en évidence **les arguments capitaux et les résultats**.
6. **Toute réponse non mise en évidence** sera ignorée.
7. Il est demandé d'indiquer **toute question sautée** par son numéro.
8. Il est permis d'admettre le résultat d'une question en écrivant **"Admis."** sur la copie, puis de s'en servir par la suite.
9. Que le candidat qui trouve ce qui lui semble être une erreur d'énoncé l'indique sur sa copie.
10. Une réponse fausse sans calculs intermédiaires est nulle.
11. Une **chose nommée non définie** par celui qui la nomme annule tout raisonnement se rapportant à cette chose.
12. Les **abréviations** non définies ou grossières sont interdites.

Exercice 1. *Formule de Taylor avec reste intégral*. **Au moyen d'un raisonnement par récurrence**, démontrer que pour toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout entier naturel n, si f est $(n+1)$-fois continûment dérivable (de classe $\mathscr{C}^{n+1}$) alors pour tous réels x_0 et x,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

On rappelle qu'une fonction continûment dérivable est une fonction dérivable de dérivée continue.

Exercice 2. *Inégalités.*

1. Montrer que pour tous entiers naturels non nuls n et p,

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+p)!} \leqslant \frac{1}{nn!}.$$

2. En déduire que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{nn!}$$

3. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{0\leqslant i<k} \left(1-\frac{i}{n}\right).$$

(*On rappelle la convention que tout produit vide est égal à 1.*)

4. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

5. Montrer que la suite réelle $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. *On pourra étudier une fonction bien choisie d'une variable réelle.*

Problème 1. Étude d'une équation fonctionnelle

Soient $a \in [-1,1]$ et φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
L'objet de ce problème est de déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{ax} f(t)dt + \varphi(x).$$

On dit qu'une fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ lorsqu'elle est infiniment dérivable, i.e. lorsque pour tout n dans $\mathbb{N}$, f est n fois dérivable.

A. Un premier cas particulier

Dans cette section uniquement, nous prenons a égal à 1 et $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

A-I. Analyse

On suppose l'existence d'une application f continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x f(t)dt + \mathrm{e}^x.$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est solution d'un problème de Cauchy du premier ordre que l'on précisera.

2. En déduire la fonction f.

A-II. Synthèse

3. Déterminer l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x f(t)dt + \mathrm{e}^x.$$

B. Un second cas particulier

Dans cette section uniquement, on prend a égal à -1 et $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

4. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 2\mathrm{ch}(x)$.

5. En utilisant la même méthode qu'à la partie précédente, déterminer l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{-x} f(t)dt + \mathrm{e}^x.$$

C. Résolution de l'équation homogène

Dans cette section seulement on suppose que φ est **l'application nulle**.

On suppose alors l'existence d'une application f continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{ax} f(t)dt.$$

C-I. Calcul des dérivées successives de f

6. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout réel x, $f'(x)$ en fonction de x, a et f.

7. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout entier naturel n,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} f(a^n x).$$

Donner en particulier, pour tout entier naturel n, la valeur de $f^{(n)}(0)$.

C-II. Une formule de Taylor

8. Démontrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x,

$$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

C-III. Étude de la fonction f sur un segment

Soit A un nombre réel strictement positif. **On admet** que toute fonction continue sur un segment est bornée. Ainsi, on choisit un réel positif M tel que

$$\forall x \in [-A, A],\ |f(x)| \leqslant M.$$

Soit x un réel appartenant à $[-A, A]$.

9. Montrer que, pour tout entier naturel n : $|f(x)| \leqslant M\dfrac{A^{n+1}}{n!}$.

10. Démontrer que $\dfrac{A^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire que $f(x) = 0$.

C-IV. Conclusion

11. Que peut-on en déduire sur la fonction f ?

D. Étude de l'équation complète

Pour cette question, a désigne un réel appartenant à $[-1, 1]$ et φ désigne une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

12. Démontrer que, sous réserve d'existence, il existe une unique application f continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\int_0^{ax} f(t)dt + \varphi(x)$.
Que peut-on en déduire sur l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{ax} f(t)dt + \varphi(x)?$$

Problème 2. Autour de e : approximation et densité

A. Trois suites convergeant vers e

On pose, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\lfloor n\mathrm{e}\rfloor}{n}$, $v_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ et $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

A-I. Étude des limites

1. Démontrer que les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendent toutes deux vers e.

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $x_n = w_n + \dfrac{1}{n.n!}$.

2. Étudier les variations des suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis en déduire qu'elles convergent vers une limite commune qu'on notera ℓ. Encadrer, pour tout n, ℓ à l'aide de w_n et x_n.

Notre but est donc de montrer que $\ell = \mathrm{e}$.

3. Démontrer la formule de Taylor avec reste intégrale : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{e} = w_n + \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{n!}(1-t)^n dt.$.

4. En déduire que $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$.

5. Démontrer que e est irrationnel.
On raisonnera par l'absurde, en utilisant notamment l'encadrement de la question 2.

A-II. Comparaison des taux de convergence

On veut comparer la manière dont $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers e. On trace, à l'aide de python, les graphes de $(\mathrm{e}-u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(\mathrm{e}-v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\mathrm{e}-w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, ainsi que le graphe de $x\mapsto \dfrac{1}{x}$. Le résultat des simulations est présenté page 6.

6. Expliquer pourquoi le graphe de $(\mathrm{e}-w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est « écrasé » par rapport au graphe de la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{x}$.

7. En regardant le graphe correspondant, conjecturer une inégalité sur $(\mathrm{e}-u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la démontrer.

8. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. En déduire qu'il existe C dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathrm{e}-v_n \leqslant \dfrac{C}{n}$, et justifier le comportement observé sur le graphe correspondant.

B. Étude des entiers exponentiels

On définit les deux ensembles suivants

$$E_{\mathbb{Z}} = \{x\in\mathbb{R} \mid \exists (m,n)\in\mathbb{Z}^2,\ x = m+n\mathrm{e}\} \text{ et } E_{\mathbb{Q}} = \{x\in\mathbb{R} \mid \exists (s,t)\in\mathbb{Q}^2,\ x = s+t\mathrm{e}\}.$$

9. Expliquer pourquoi $E_{\mathbb{Q}}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

On veut montrer qu'en fait, $E_{\mathbb{Z}}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $A = E_{\mathbb{Z}}\cap\mathbb{R}_+^*$.

10. Montrer que $0\in E_{\mathbb{Z}}$ et que pour tous $(x,y)\in E_{\mathbb{Z}}^2$, $x+y$ et $-x$ sont dans $E_{\mathbb{Z}}$.

11. Montrer que A admet une borne inférieure, que l'on notera μ.

On montre dans les questions 12. et 13. que $\mu = 0$. On définit $\mu\mathbb{N}^* = \{x\in\mathbb{R} \mid \exists n\in\mathbb{N}^*, x = \mu n\}$.

12. **On suppose, dans cette question**, que $\mu>0$ et $\mu\in A$. Montrer que $\mu\mathbb{N}^* = A$, et aboutir à une contradiction. *On pourra utiliser le fait que* 1 *et* e *sont dans* A.

13. **Dans cette question,** on suppose que $\mu>0$ et $\mu\notin A$. Montrer qu'il existe deux éléments x et y dans A tels que $\mu<y<x\leqslant \mu+\dfrac{\mu}{2}$, et aboutir à une contradiction.

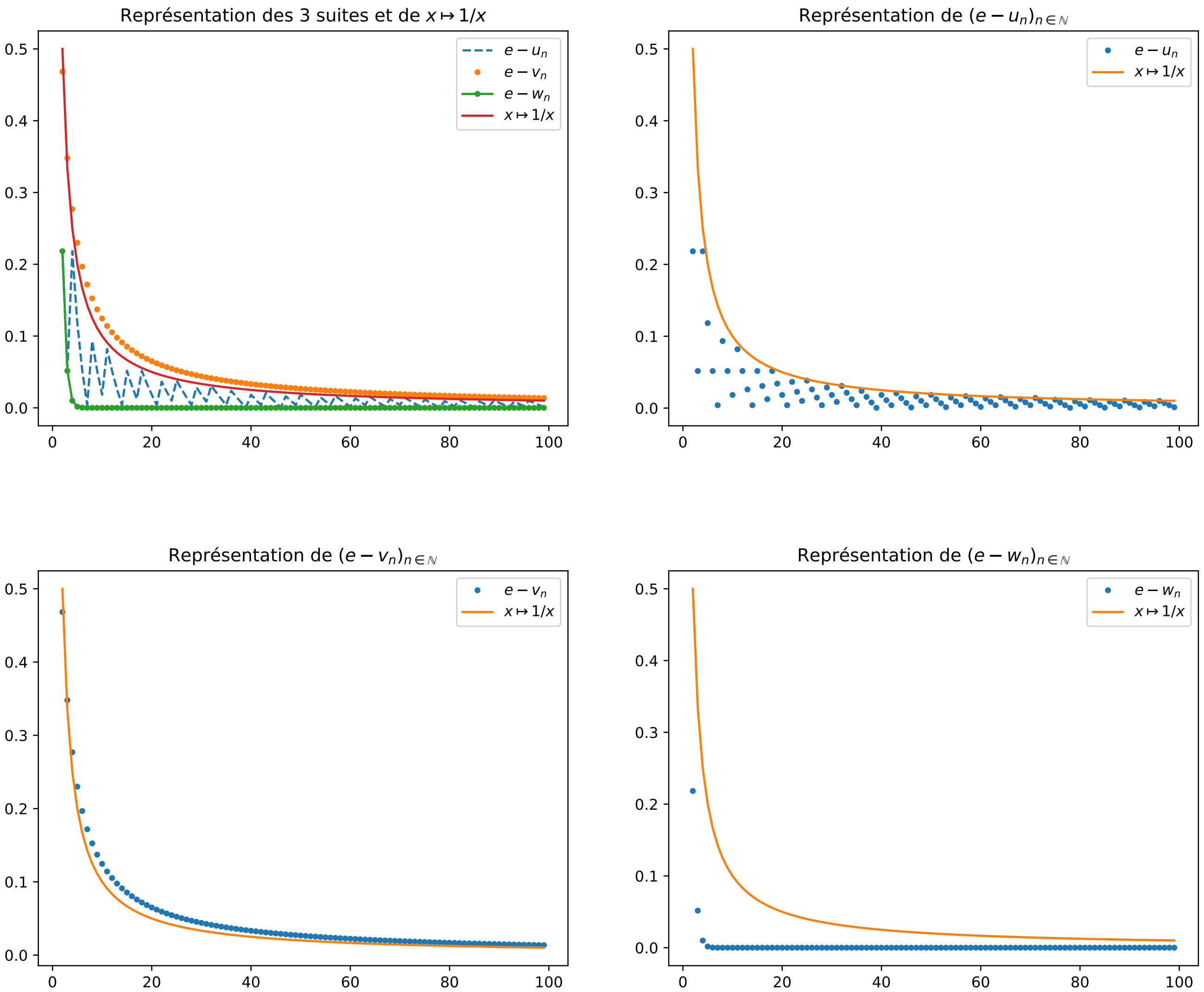
14. Conclure alors que A est dense dans $\mathbb{R}_+^*$, et en déduire que $E_{\mathbb{Z}}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3. *Bonus, à faire* **seulement** *si vous vous ennuyez !*. Soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si pour tout $x\geqslant 0$, $f(x)+f'(x)\geqslant 0$, alors pour tout $x\geqslant 0$, $f(x)\geqslant 0$.

2. Soit α un complexe vérifiant $\mathrm{Re}(\alpha)>0$. On suppose $f'(x)+\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. On suppose f de classe $\mathscr{C}^2$ et $f''(t)+f'(t)+f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. *On cherchera* α *et* β *tels que si* $g = f'+\alpha f$, *alors* $g'+\beta g \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.


Représentation des 3 suites et de $x \mapsto 1/x$
$e - u_n$
$e - v_n$
$e - w_n$
$x \mapsto 1/x$
Représentation de $(e - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
Représentation de $(e - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$
Représentation de $(e - w_n)_{n \in \mathbb{N}}$