MPSI 1

Mathématiques
DS 04 (4H 00)

Samedi 30 novembre – 8h-12h

Le sujet comporte 6 pages avec la page de garde. Il est composé de deux exercices et deux problèmes. Le résultat de l'exercice 1 peut-être utilisé pour traiter la question 8. du problème 1 et la question 3. du problème 2. L'exercice 2 et les deux problèmes sont indépendants entre eux.

Consignes aux aspirants aux grandes écoles :

1. Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
2. **Aucune couleur** n'est autorisée à l'exception du bleu et du noir.
3. Il est demandé de **numéroter** les écrits **page par page** en bas à droite.
4. Il est demandé d'indiquer **les numéros** ou étiquettes des questions dans la marge gauche.
5. Il est demandé de mettre en évidence **les arguments capitaux et les résultats**.
6. **Toute réponse non mise en évidence** sera ignorée.
7. Il est demandé d'indiquer **toute question sautée** par son numéro.
8. Il est permis d'admettre le résultat d'une question en écrivant **"Admis."** sur la copie, puis de s'en servir par la suite.
9. Que le candidat qui trouve ce qui lui semble être une erreur d'énoncé l'indique sur sa copie.
10. Une réponse fausse sans calculs intermédiaires est nulle.
11. Une **chose nommée non définie** par celui qui la nomme annule tout raisonnement se rapportant à cette chose.
12. Les **abréviations** non définies ou grossières sont interdites.

Exercice 1. *Formule de Taylor avec reste intégral*. **Au moyen d'un raisonnement par récurrence**, démontrer que pour toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout entier naturel n, si f est $(n+1)$-fois continûment dérivable (de classe $\mathscr{C}^{n+1}$) alors pour tous réels x_0 et x,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

On rappelle qu'une fonction continûment dérivable est une fonction dérivable de dérivée continue.

Correction. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient x_0 et x deux réels.

(D) **Déclaration.**
Pour tout $n \in [\![0, +\infty[\![$, on désigne par $\mathcal{P}(n)$ la proposition suivante :
« Si la fonction f est $(n+1)$-fois continûment dérivable, alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.»$$

(I) **Initialisation.**
On vise à montrer $\mathcal{P}(0)$. On suppose que f est une fois continûment dérivable.
Alors $f' : t \mapsto f'(t)$ est une fonction continue dont $f : t \mapsto f(t)$ est une des primitives.
Donc

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt.$$

Alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{0} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^0}{0!} f^{(0+1)}(t)dt.$$

D'où $\mathcal{P}(0)$.

(H) **Hérédité.**
Soit $n \in [\![1, +\infty[\![$. On vise à montrer que $\mathcal{P}(n-1)$ implique $\mathcal{P}(n)$.
On suppose $\mathcal{P}(n-1)$. On vise à montrer $\mathcal{P}(n)$.
On suppose que f est $(n+1)$-fois continûment dérivable.
Alors f est n-fois continûment dérivable, donc, d'après $\mathcal{P}(n-1)$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt$$

Or $f^{(n)}$ est continûment dérivable, donc on peut intégrer par parties dans le membre de droite en choisissant $t \mapsto -\dfrac{(x-t)^n}{n!}$ pour primitive de $t \mapsto \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ et en dérivant $t \mapsto f^{(n)}(t)$.
D'où $\mathcal{P}(n)$.

(C) **Conclusion.**
En conclusion, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![0, +\infty[\![$.

On peut prouver cela autrement en considérant la fonction

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t).$$

Exercice 2. *Inégalités.*

1. Montrer que pour tous entiers naturels non nuls n et p,

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+p)!} \leqslant \frac{1}{nn!}.$$

Correction. Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$. On a $\dfrac{1}{n+1} \in [0;1[$, donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)} &\leqslant \left(\frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{n+1}\right)^p\right) \\ &\leqslant \frac{1}{n+1}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} \\ &\leqslant \frac{1}{n}\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. En déduire que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{nn!}$$

Correction. Cette suite réelle est **croissante** et d'après la question 1., elle est **majorée** (par $1+1+\dfrac{1}{1\times 1!}$ entre autres).

Donc elle est convergente et

$$\sup\left\{\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} : N \in \mathbb{N}\right\} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$$

Soit n dans $\mathbb{N}^*$ fixé. Ainsi,

- D'une part,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$$

- D'autre part, d'après la question 1. toujours, pour tout p dans $\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n+p} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{nn!}$$

et en prenant le supremum lorsque p parcourt $\mathbb{N}^*$, on obtient

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{nn!}.$$

D'où l'encadrement.

Autre voie : La suite est convergente et d'après 1., pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n+p} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{nn!}$$

puis par passage à la limite dans les inégalités larges quand p tend vers $+\infty$,

$$0 \leqslant \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{nn!}.$$

D'où le résultat.

3. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{0\leqslant i<k} \left(1-\frac{i}{n}\right).$$

(*On rappelle la convention que tout produit vide est égal à 1.)*

Correction. Pour tous n et k dans $\mathbb{N}$, si $k \leqslant n$ alors

$$\binom{n}{k} \times \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\frac{n-0}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{n-(k-1)}{n}.$$

Le résultat suit d'après la formule du binôme.

4. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Correction. Comme $[0;1]$ est stable par multiplication et que la multiplication par tout nombre positif préserve l'ordre, le résultat suit.

5. Montrer que la suite réelle $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. *On pourra étudier une fonction bien choisie d'une variable réelle.*

Correction. On considère fonction $f : [1,+\infty[, x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$. Alors f est dérivable sur l'intervalle $[1,+\infty[$ et pour tout réel $x \in [1,+\infty[$,

$$f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \times \int_{[x,x+1]} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x+1}\right) dt.$$

Donc par positivité de la somme intégrale, f est est croissante. D'où, pour tout entier naturel $n \in [1,+\infty[$,

$$f(n) \leqslant f(n+1)$$

i.e.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

D'où la croissance de la suite.
Pour établir la positivité de la dérivée : on peut montrer que la fonction
$x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$.
Autre voie : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\ 0 \leqslant 1 - \frac{i}{n} \leqslant 1 - \frac{i}{n+1}.$$

Donc, d'après 3.,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Problème 1. Étude d'une équation fonctionnelle

Correction. D'après Agro-Veto 2010.

Soient $a \in [-1,1]$ et φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
L'objet de ce problème est de déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{ax} f(t)dt + \varphi(x).$$

On dit qu'une fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ lorsqu'elle est infiniment dérivable, i.e. lorsque pour tout n dans $\mathbb{N}$, f est n fois dérivable.

A. Un premier cas particulier

Dans cette section uniquement, nous prenons a égal à 1 et $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

A-I. Analyse

On suppose l'existence d'une application f continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x f(t)dt + \mathrm{e}^x.$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est solution d'un problème de Cauchy du premier ordre que l'on précisera.

Correction. Comme $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en 0, elle est dérivable : comme $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est aussi dérivable, on en déduit que f est dérivable et que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = f(x) + \mathrm{e}^x.$$

De plus,

$$f(0) = \int_0^0 f(t)dt + \mathrm{e}^0 = 1.$$

2. En déduire la fonction f.

Correction. f vérifie alors l'équation différentielle $y' - y = \mathrm{e}^x$.
On résout déjà l'équation homogène associée : $y' - y = 0$, dont l'ensemble des solutions est $\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Ensuite, on cherche une solution particulière de l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière de la forme $g : x \mapsto \lambda(x)\mathrm{e}^x$ où λ est une fonction dérivable. Alors

$$\begin{aligned} g \text{ est solution } &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) - g(x) = \mathrm{e}^x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = 1. \end{aligned}$$

Donc $g : x \mapsto x\mathrm{e}^x$ est solution particulière du problème.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est l'ensemble

$$\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Comme f est solution de cette équation différentielle, on choisit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto (\lambda + x)\mathrm{e}^x$.
Or, on sait que $f(0) = 1$, donc $\lambda = 1$, donc

$$\boxed{f : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^x.}$$

A-II. Synthèse

3. Déterminer l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x f(t)dt + \mathrm{e}^x.$$

Correction. On vérifie que la solution trouvée précédemment fonctionne bien : soit $f : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^x$. Alors f est bien continue sur $\mathbb{R}$ et si $x \in \mathbb{R}$, en faisant une intégration par parties (IPP) avec $(1+t) = u(t)$, $\mathrm{e}^t = v'(t)$, on obtient

$$\int_0^x (1+t)\mathrm{e}^t dt = [(1+t)\mathrm{e}^t]_0^x - \int_0^x \mathrm{e}^t dt = (1+x)\mathrm{e}^x - 1 - \mathrm{e}^x + 1,$$

donc

$$\int_0^x f(t)dt = f(x) - \mathrm{e}^x,$$

ce qui signifie exactement que f est solution du problème !

Autre voie : Soit $f : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^x$.. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = f(t) + \mathrm{e}^t \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

Donc en intégrant pour t courant de 0 à x,

$$f(x) - 1 = \int_0^x f(t)dt + \mathrm{e}^x - 1.$$

Donc la fonction $x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^x$ est bien l'unique solution de l'équation fonctionnelle.

B. Un second cas particulier

Dans cette section uniquement, on prend a égal à -1 et $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

4. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 2\mathrm{ch}(x)$.

Correction.

(a) **Équation homogène.** L'équation homogène est $y'' + y = 0$, d'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$, de racines $\pm i$. Donc l'ensemble des solutions est

$$\{x \mapsto \lambda \sin(x) + \mu \cos(x),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

(b) **Second membre.** On cherche un second membre de chacune des deux équations suivantes :

(E_+) $y'' + y = \mathrm{e}^x$

(E_-) $y'' + y = \mathrm{e}^{-x}$.

La somme des deux solutions particulières trouvées sera solution particulière de $y'' + y = 2\text{ch}(x)$.

i. pour (E_+), on remarque que 1 n'est pas solution de l'équation caractéristique, donc on cherche une solution de la forme $g : x \mapsto \lambda e^x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. En réinjectant , on remarque que

$$g'' + g = 2\lambda e^x,$$

donc $\lambda = \dfrac{1}{2}$ convient.

ii. De même, on remarque que $x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{-x}$ est solution de E_-.

On en déduit que $x \mapsto \text{ch}(x)$ est solution particulière de l'équation.

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est

$$\left\{x \mapsto \text{ch}(x) + \lambda \sin(x) + \mu \cos(x),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

5. En utilisant la même méthode qu'à la partie précédente, déterminer l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{-x} f(t)dt + e^x.$$

Correction. Analyse. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{-x} f(t)dt + e^x.$$

Soit F une primitive de f. Alors pour tout réel x,

$$f(x) = F(-x) - F(0) + e^x,$$

donc f est dérivable comme composée et somme de fonctions dérivables et pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = -F'(-x) + e^x,$$

donc

$$\boxed{f'(x) = -f(-x) + e^x}.$$

Cette équation permet de dire que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x réel,

$$f''(x) = f'(-x) + e^x = -f(x) + e^{-x} + e^x,$$

donc

$$\boxed{f''(x) + f(x) = 2\text{ch}(x).}$$

Donc on choisit λ et μ deux réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda \sin(x) + \mu \cos(x) + \mathrm{ch}(x).$$

Or, on sait que $f(0) = \displaystyle\int_0^0 f(t)dt + \mathrm{e}^0 = 1$ et que $f'(0) = -f(-0) + \mathrm{e}^0 = 0$, donc

$$\begin{cases} \mu + 1 = 1 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

donc $\mu = \lambda = 0$, donc

$$\boxed{f : x \mapsto \mathrm{ch}(x).}$$

Synthèse. Réciproquement, si $f : x \mapsto \mathrm{ch}(x)$, alors pour tout x réel,

$$\int_0^{-x} f(t)dt + \mathrm{e}^x = \int_0^{-x} \mathrm{ch}(t)dt + \mathrm{e}^x = [\mathrm{sh}(t)]_0^{-x} + \mathrm{e}^x = -\mathrm{sh}(x) + \mathrm{e}^x = \frac{-\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} + \mathrm{e}^x = \mathrm{ch}(x) = f(x),$$

donc le problème admet une unique solution : $\boxed{\mathrm{ch}}$.

C. Résolution de l'équation homogène

Dans cette section seulement on suppose que φ est **l'application nulle**.

On suppose alors l'existence d'une application f continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{ax} f(t)dt.$$

C-I. Calcul des dérivées successives de f

6. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout réel x, $f'(x)$ en fonction de x, a et f.

Correction. Soit F une primitive de f. Alors pour tout x réel, $f(x) = F(ax) - F(0)$. Comme F est dérivable, f est dérivable, et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \boxed{f'(x) = aF'(ax) = af(ax)}.$$

7. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout entier naturel n,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} f(a^n x).$$

Donner en particulier, pour tout entier naturel n, la valeur de $f^{(n)}(0)$.

Correction. On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n,

$(\mathcal{P}_n)$ f est n fois dérivable et $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} f(a^n x)$.

- **Initialisation.** pour $n = 0$, $f^{(0)} = f$ et pour tout x réel, $f(x) = a^0 f(a^0 x)$, donc l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors, pour tout x réel, $f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} f(a^n x)$. Comme f est dérivable, on en déduit que $f^{(n)}$ est dérivable, donc f est $n+1$ fois dérivable, et que pour tout x réel,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= a^{\frac{n(n+1)}{2}} a^n f'(a^n x) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= a^{\frac{n(n+1)}{2}} a^n a f(a^{n+1} x) \text{ par la question précédente} \\ &= a^{\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)} f(a^{n+1} x) = \boxed{a^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} f(a^{n+1} x)} \end{aligned}$$

  d'où l'hérédité, et le résultat par le principe de récurrence.

On en déduit, en particulier, que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\boxed{f^{(n)}(0) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} f(0) = 0.}$$

C-II. Une formule de Taylor

8. Démontrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x,

$$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Correction. Démontrons, comme proposé, le résultat par récurrence. Démontrons que pour tout entier naturel n,

$$(\mathcal{Q}_n)\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

- **Initialisation.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_0^x \frac{(x-t)^0}{0!} f^{(0+1)}(t)dt = \int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0) = f(x),$$

  d'où l'initialisation.
- **Hérédité.** Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{Q}_n$ est vraie. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

  Soit $x \in \mathbb{R}$. Effectuons, dans l'intégrale, une intégration par parties (avec $u'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$, i.e. $u(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$, et $v(t) = f^{(n+1)}(t)$, donc $v'(t) = f^{(n+2)}(t)$).

Alors

$$f(x) = \left[\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)\right]_0^x - \int_0^x -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)dt$$
$$= 0 + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)dt,$$

le crochet étant nul car $(x-x)^{n+1} = 0$ et car $f^{(n+1)}(0) = 0$. D'où l'hérédité, et le résultat !

On peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale de l'exercice 1 pour $x_0 = 0$.

C-III. Étude de la fonction f sur un segment

Soit A un nombre réel strictement positif. **On admet** que toute fonction continue sur un segment est bornée. Ainsi, on choisit un réel positif M tel que

$$\forall x \in [-A, A],\ |f(x)| \leqslant M.$$

Soit x un réel appartenant à $[-A, A]$.

9. Montrer que, pour tout entier naturel n : $|f(x)| \leqslant M\dfrac{A^{n+1}}{n!}$.

Correction. On suppose $x \leqslant 0$, on adapte la preuve pour $x < 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, par la formule de Taylor (question 8.), on sait que

$$|f(x)| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt\right| \leqslant \int_{[0,x]}\left|\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\right|dt$$

Or, si $t \in [0, x]$, $0 \leqslant x - t \leqslant A$ et $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant M$ et $x \leqslant A$; donc

$$|f(x)| \leqslant \int_{[0,x]} \frac{(x-t)^n}{n!}\left|f^{(n+1)}(t)\right|dt \leqslant \int_{[0,x]} \frac{A^n}{n!}Mdt \leqslant \frac{A^n}{n!}Mx \leqslant M\frac{A^{n+1}}{n!}.$$

10. Démontrer que $\dfrac{A^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire que $f(x) = 0$.

Correction. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geqslant 2A$. Alors, pour tout $n \geqslant N$,

$$0 \leqslant \frac{A^n}{n!} \leqslant \frac{A^N}{N!} \times \frac{A^{n-N}}{\prod_{k=N+1}^n k} \leqslant \frac{A^N}{N!} \times \frac{A^{n-N}}{\prod_{k=N+1}^n (2A)} \leqslant \boxed{\frac{A^N}{N!} \times \frac{1}{2^{n-N}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0},$$

donc, par encadrement, $\boxed{\dfrac{A^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

Donc $|f(x)| \leqslant A\dfrac{A^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\boxed{f(x) = 0}$.

C-IV. Conclusion

11. Que peut-on en déduire sur la fonction f ?

> **Correction.** On en déduit que la seule fonction solution du problème est la fonction nulle : elle est clairement solution, et on vient de voir que si f était solution du problème, alors elle était nulle sur tout segment, donc nulle.

D. Étude de l'équation complète

Pour cette question, a désigne un réel appartenant à $[-1, 1]$ et φ désigne une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

12. Démontrer que, sous réserve d'existence, il existe une unique application f continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\int_0^{ax} f(t)dt + \varphi(x)$.
Que peut-on en déduire sur l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{ax} f(t)dt + \varphi(x)?$$

> **Correction.** Soient f et g deux fonctions solutions du problème, et $h = f - g$. Alors, pour tout x réel,
>
> $$h(x) = f(x) - g(x) = \int_0^{ax} f(t)dt + \varphi(x) - \int_0^{ax} g(t)dt - \varphi(x) = \int_0^{ax} h(t)dt.$$
>
> Donc h est solution du problème de la partie précédente, donc h est nulle !
>
> On en déduit que l'ensemble des solutions de ce problème est ou bien vide, ou bien un singleton !

Problème 2. Autour de e : approximation et densité

A. Trois suites convergeant vers e

On pose, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\lfloor ne \rfloor}{n}$, $v_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ et $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

A-I. Étude des limites

1. Démontrer que les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendent toutes deux vers e.

> **Correction.** Il s'agit purement de questions de cours ! Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors
>
> $$ne - 1 < \lfloor ne \rfloor \leqslant ne \text{ donc } e - \frac{1}{n} < u_n \leqslant e.$$

Or, $\mathrm{e} - \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$ $\boxed{\text{donc, par encadrement, } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}.}$

Ensuite, on écrit que si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Or, $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc, comme $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc, par composition de limites, $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}}$.

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $x_n = w_n + \dfrac{1}{n.n!}$.

2. Étudier les variations des suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis en déduire qu'elles convergent vers une limite commune qu'on notera ℓ. Encadrer, pour tout n, ℓ à l'aide de w_n et x_n.

Correction. Déjà, (w_n) est croissante car si $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{(n+1)!}$. Ensuite, montrons que (x_n) est décroissante : si $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!(n+1)} - \frac{1}{n!n} \\ &= \frac{(n+2)n}{(n+1)!(n+1)n} - \frac{(n+1)^2}{(n+1)!(n+1)n} \\ &= \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{(n+1)!n(n+1)} = -\frac{1}{(n+1)!n(n+1)} < 0, \end{aligned}$$

Donc (x_n) est décroissante. Enfin, $|x_n - w_n| = \dfrac{1}{n!n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc (w_n) et (x_n) sont adjacentes, donc elles convergent vers une même limite ℓ. On a de plus

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \leqslant \ell \leqslant x_n.$$

De plus, les inégalités sont strictes car les deux suites sont strictement monotones.

Notre but est donc de montrer que $\ell = \mathrm{e}$.

3. Démontrer la formule de Taylor avec reste intégrale : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{e} = w_n + \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{n!}(1-t)^n dt$..

Correction. Démontrons par récurrence la proposition $\mathcal{P}_n$: $e = w_n + R_n$.

Initialisation. Pour $n = 0$, $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t dt = \mathrm{e} - 1$, donc $w_n + R_n = 1 + \mathrm{e} - 1 = \mathrm{e}$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain rang n. Alors exprimons R_n en fonction

de R_{n+1} à l'aide d'une intégration par parties. Posons $u(t) = \mathrm{e}^t$, $v'(t) = (1-t)^n$. Alors $u'(t) = \mathrm{e}^t$ et $v(t) = -\dfrac{1}{(n+1)}(1-t)^{n+1}$, donc

$$R_n = \frac{1}{n!}\left[-\mathrm{e}^t\frac{1}{(n+1)}(1-t)^{n+1}\right]_0^1 + \frac{1}{n!}\int_0^1 \mathrm{e}^t\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)}dt = \frac{1}{(n+1)!} + R_{n+1},$$

d'où $\mathrm{e} = w_n + R_n = w_n + \dfrac{1}{(n+1)!} + R_{n+1} = w_{n+1} + R_{n+1}$.

On peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale de l'exercice 1 pour $f = \exp$, $x_0 = 0$ et $x = 1$.

4. En déduire que $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$.

Correction. On remarque que

$$|R_n| = \left|\int_0^1 \mathrm{e}^t\frac{(1-t)^n}{n}\right| \leqslant \int_0^1 \frac{|\mathrm{e}^t||1-t|^n}{n}dt \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}}{n}dt \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par encadrement. Donc $w_n = \mathrm{e} - R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$.

5. Démontrer que e est irrationnel.
On raisonnera par l'absurde, en utilisant notamment l'encadrement de la question 2.

Correction. Si $\mathrm{e} = \dfrac{p}{q}$, alors pour tout $n \geqslant q$, $n!\mathrm{e} \in \mathbb{N}$. Or si $n \in \mathbb{N}$,

$$n!w_n \leqslant n!\mathrm{e} \leqslant n!w_n + \frac{1}{n},$$

donc, comme pour $n \geqslant q$, $n!w_n \in \mathbb{N}$ et $n!\mathrm{e} \in \mathbb{N}$, et $\dfrac{1}{n} < 1$, on a nécessairement $n!\mathrm{e} = n!w_n$ pour tout $n \geqslant q$, donc $\mathrm{e} = w_n$ pour tout $n \geqslant q$, absurde car w_n est strictement croissante.

A-II. Comparaison des taux de convergence

On veut comparer la manière dont $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers e. On trace, à l'aide de python, les graphes de $(\mathrm{e}-u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(\mathrm{e}-v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\mathrm{e}-w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, ainsi que le graphe de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Le résultat des simulations est présenté page 19.

6. Expliquer pourquoi le graphe de $(\mathrm{e}-w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est « écrasé » par rapport au graphe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Correction. Par la question 2., on sait que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $w_n \leqslant \mathrm{e} \leqslant w_n + \dfrac{1}{n.n!}$. Ainsi, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}-w_n}{1/n} \leqslant \dfrac{1}{n!}$. Or $\dfrac{1}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui assure que cette

suite tende beaucoup plus vite vers 0 que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

7. En regardant le graphe correspondant, conjecturer une inégalité sur $(\mathrm{e}-u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la démontrer.

Correction. On conjecture que $0 \leqslant \mathrm{e}-u_n \leqslant \frac{1}{n}$. C'est à peu près évident par la question 1...

8. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. En déduire qu'il existe C dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathrm{e}-v_n \leqslant \frac{C}{n}$, et justifier le comportement observé sur le graphe correspondant.

Correction. C'est la question plus difficile de cette partie. Déjà, comme on ne comprend rien à l'inégalité que l'on souhaite démontrer, on la réécrit. Par croissance de exp, si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \Leftrightarrow n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 1 \leqslant (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

La première inégalité est évidente, on sait que pour tout x dans $]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$. Pour la seconde inégalité, réécrivons-la :

$$\begin{aligned} 1 \leqslant (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{n+1} \geqslant \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &\Leftrightarrow \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \leqslant -\frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

inégalité qui est toujours vraie !

D'où $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 1 \leqslant (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, d'où l'inégalité désirée. Ainsi,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

d'où

$$v_n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)v_n,$$

d'où $0 \leqslant \mathrm{e}-v_n \leqslant \frac{v_n}{n}$. Mais, comme $v_n \leqslant \mathrm{e}$, $\boxed{0 \leqslant\leqslant \frac{\mathrm{e}}{n}}$.

Ainsi, $\left(\frac{\mathrm{e}-v_n}{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, ce qui est tout à fait cohérent avec la conjecture : la suite semble décroître comme $\frac{1}{n}$, en étant quand même pas en-dessous !

B. Étude des entiers exponentiels

On définit les deux ensembles suivants

$$E_{\mathbb{Z}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (m,n) \in \mathbb{Z}^2,\ x = m + n\mathrm{e}\} \text{ et } E_{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (s,t) \in \mathbb{Q}^2,\ x = s + t\mathrm{e}\}.$$

9. Expliquer pourquoi $E_{\mathbb{Q}}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction. On remarque que $\boxed{\mathbb{Q} \subset E_{\mathbb{Q}}}$. Or, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, donc $E_{\mathbb{Q}}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, et $x \in \mathbb{R}$, on choisit r dans $\mathbb{Q}$ **et donc** dans $E_{\mathbb{Q}}$ tel que $|x - r| \leqslant \varepsilon$.

On veut montrer qu'en fait, $E_{\mathbb{Z}}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $A = E_{\mathbb{Z}} \cap \mathbb{R}_+^*$.

10. Montrer que $0 \in E_{\mathbb{Z}}$ et que pour tous $(x,y) \in E_{\mathbb{Z}}^2$, $x + y$ et $-x$ sont dans $E_{\mathbb{Z}}$.

Correction. On remarque que $0 = 0 + 0.\mathrm{e}$ donc $\boxed{0 \in E_{\mathbb{Z}}.}$
Soient ensuite x et y dans $E_{\mathbb{Z}}^2$. On choisit (m,n), (p,q) deux couples d'entiers tels que $x = m + n\mathrm{e}$ et $y = p + q\mathrm{e}$. Alors

$$x + y = (m+p) + (n+q)\mathrm{e},$$

et $(m+p)$ et $(n+q)$ sont entiers $\boxed{\text{donc } x + y \in E_{\mathbb{Z}}.}$
De même, $-x = -m + (-n)\mathrm{e}$, et $(-m,-n) \in \mathbb{Z}^2$ $\boxed{\text{donc } -x \in E_{\mathbb{Z}}.}$

11. Montrer que A admet une borne inférieure, que l'on notera μ.

Correction. A est une partie non vide (car contenant 1 par exemple), minorée (par 0) de $\mathbb{R}$, donc elle admet une borne inférieure.

On montre dans les questions 12. et 13. que $\mu = 0$. On définit $\mu\mathbb{N}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, x = \mu n\}$.

12. **On suppose, dans cette question**, que $\mu > 0$ et $\mu \in A$. Montrer que $\mu\mathbb{N}^* = A$, et aboutir à une contradiction. *On pourra utiliser le fait que* 1 *et* e *sont dans* A.

Correction.
Montrons ce résultat par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \mu\mathbb{N}^*$. Alors On choisit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \mu n$. Comme on a supposé que $\mu \in A$, par la question 10., $n\mu \in E_{\mathbb{Z}}$. De plus, $\mu > 0$ donc $n\mu > 0$.
$\boxed{\text{Donc } x \in \mu\mathbb{N}^*.}$

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in A$. Par l'absurde, supposons que $x \notin \mu\mathbb{N}^*$, i.e. $\dfrac{x}{\mu} \notin \mathbb{N}^*$.

Donc, en particulier, $0 < \dfrac{x}{\mu} - \left\lfloor \dfrac{x}{\mu} \right\rfloor < 1$, c'est-à-dire que

$$\boxed{0 < x - \mu \left\lfloor \frac{x}{\mu} \right\rfloor < \mu}.$$

Notons $y = x - \mu \left\lfloor \frac{x}{\mu} \right\rfloor$.

On sait que $x \in E_{\mathbb{Z}}$, $\mu \in E_{\mathbb{Z}}$ donc $\mu \left\lfloor \frac{x}{\mu} \right\rfloor \in E_{\mathbb{Z}}$, donc $y \in E_{\mathbb{Z}}$. De plus, $y > 0$, donc $\boxed{y \in A}$. Mais comme $y < \mu$, cela contredit le fait que $\mu = \inf(A)$!

Donc, finalement $\boxed{\frac{x}{\mu} \in \mathbb{N}^*, \text{ c'est-à-dire que } x \in \mu\mathbb{N}^*.}$

D'où l'inclusion réciproque et l'égalité !

Comme 1 et e sont clairement dans A, 1 et e sont dans $\mu\mathbb{N}^*$, donc on choisit p et q entiers non nuls tels que $1 = p\mu$ et $\mathrm{e} = q\mu$, donc $\mathrm{e} = \frac{\mathrm{e}}{1} = \frac{q}{p}$ donc e est rationnel, absurde !
Donc on n'a pas $\mu > 0$ et $\mu \in A$.

13. Dans cette question, on suppose que $\mu > 0$ et $\mu \notin A$. Montrer qu'il existe deux éléments x et y dans A tels que $\mu < y < x \leqslant \mu + \frac{\mu}{2}$, et aboutir à une contradiction.

Correction. On sait que $\mu = \inf(A)$. Prenons $\varepsilon = \frac{\mu}{2}$. Alors on choisit $x \in A$ tel que $\mu \leqslant x \leqslant \mu + \varepsilon = \mu + \frac{\mu}{2}$.
Comme $x \neq \mu$ ($\mu \notin A$), $x - \mu > 0$. Prenons $\varepsilon = \frac{x-\mu}{2}$. Alors on choisit $y \in A$ tel que $\mu \leqslant y \leqslant \mu + \varepsilon$, i.e. $|\mu - y| \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{x-\mu}{2} \leqslant \frac{\mu}{4} \leqslant \frac{\mu}{2}$.

Notons ensuite $z = x - y$. Alors $\mu < y \leqslant \mu + \frac{\mu}{2}$ et $\mu < x \leqslant \mu + \frac{\mu}{2}$ donc

$$\boxed{0 < x - y \leqslant \frac{\mu}{2} < \mu \text{ et } x - y \in A}.$$

On aboutit donc à une absurdité en remarquant que $x - y < \mu \leqslant x - y$. Donc on n'a pas $\mu > 0$ et $\mu \notin A$.

14. Conclure alors que A est dense dans $\mathbb{R}_+^*$, et en déduire que $E_{\mathbb{Z}}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction. Les deux questions précédentes nous permettent donc de dire que $\mu = 0$.
Soit x dans $\mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.
Comme $\inf(A) = 0$, on choisit $b \in A$ tel que $0 < b < \varepsilon$.
Notons alors $k = \left\lfloor \frac{x}{b} \right\rfloor$.
Alors $k \leqslant \frac{x}{b} \leqslant k + 1$, donc

$$kb \leqslant x \leqslant kb + b.$$

Mais $b \in A$ donc $kb \in A$, et

$$kb \leqslant x \leqslant kb + \varepsilon,$$

ce qui correspond exactement à la densité de A dans $\mathbb{R}_+$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

- si $x > 0$, alors par la question précédente, on choisit $a \in A \subset E_{\mathbb{Z}}$ tel que $|x - a| \leqslant \varepsilon$,
- si $x = 0$, $x \in E_{\mathbb{Z}}$,
- si $x < 0$, alors par la question précédente, comme $-x > 0$, on choisit $a \in A \subset E_{\mathbb{Z}}$ tel que $|-x - a| \leqslant \varepsilon$. Mais $-a \in E_{\mathbb{Z}}$ donc $|x - (-a)| \leqslant \varepsilon$.

D'où la densité de $E_{\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3. *Bonus, à faire* **seulement** *si vous vous ennuyez !*. Soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) + f'(x) \geqslant 0$ et que $f(0) \geqslant 0$, alors pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$.

Correction. On écrit que f est solution de $y' + y = g$, où $g = f + f'$. Alors on a une expression intégrale de f : l'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-x},\ \lambda \in \mathbb{K}\}$. Ensuite, la méthode de variation de la constante nous donne que

$$x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \int_0^x \mathrm{e}^t g(t)dt$$

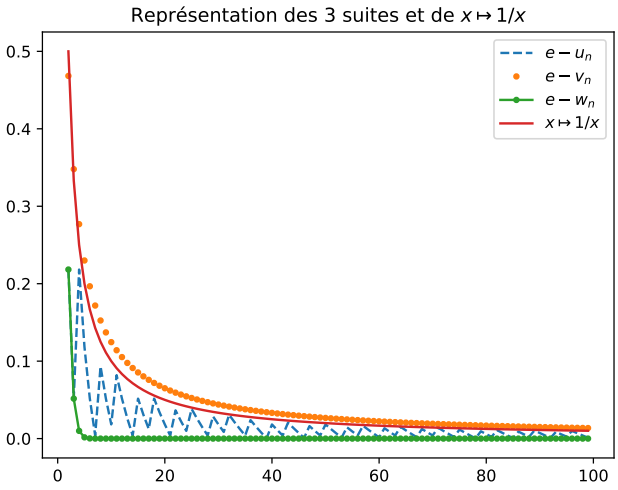
est solution particulière de l'équation différentielle. Donc on choisit λ tel que

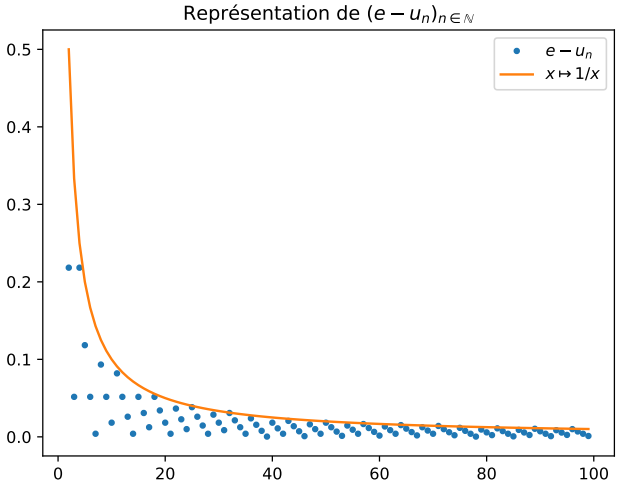
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} \int_0^x \mathrm{e}^t g(t)dt.$$

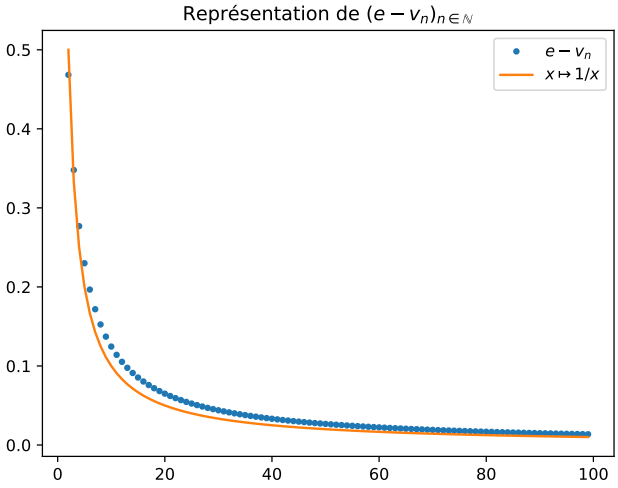
Donc, si pour tout x, $f(x) + f'(x) \geqslant 0$ et que $f(0) \geqslant 0$, alors $\lambda \geqslant 0$; donc pour tout $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t g(t)dt \geqslant 0$.

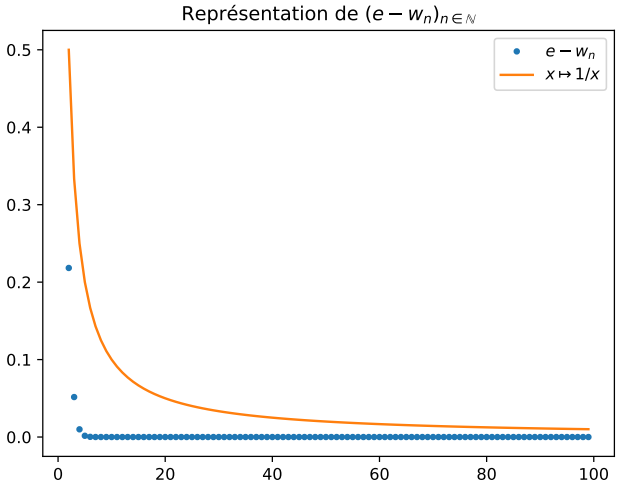
2. Soit α un complexe vérifiant $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$. On suppose $f'(x) + \alpha f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. On suppose f de classe $\mathscr{C}^2$ et $f''(t) + f'(t) + f(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $f(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. *On cherchera α et β tels que si $g = f' + \alpha f$, alors $g' + \beta g \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.*


Représentation des 3 suites et de $x \mapsto 1/x$
$e - u_n$
$e - v_n$
$e - w_n$
$x \mapsto 1/x$


Représentation de $(e - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
$e - u_n$
$x \mapsto 1/x$


Représentation de $(e - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$
$e - v_n$
$x \mapsto 1/x$


Représentation de $(e - w_n)_{n \in \mathbb{N}}$
$e - w_n$
$x \mapsto 1/x$