1 Thèmes

1. *Suites numériques.*

   (1) Généralités : (a) Suites constantes, suites stationnaires ; Suites minorées, majorées, bornées. (b) Combinaisons linéaires et produit de deux suites bornées. (c) Suites monotones et caractérisation par comparaison de termes consécutifs (accroissement absolue dans le cas général, accroissement relatif dans le cas de suites à valeurs strictement positives). (d) Sous-suites : exemples.

   (2) Limite d'une suite réelle : (a) Définition unifiée pour une limité dans $[-\infty, +\infty]$ et unicité. (b) Limite réelle (finie) : définitions équivalentes ; limite de $(1/n)_{n\geqslant 1}$, limite de $(q^n)_{n\geqslant 0}$, où $q \in]-1; 1[$. (c) Bornitude de toute suite convergente. (d) Limite infinie : limite de $(q^n)_{n\geqslant 0}$, où $q \in]1; +\infty[$. (e) Limite et sous-suites : sous-suites extraites d'une suite admettant une limite, les deux sous-suites des termes de rangs pairs et des termes de rangs impairs.

   (3) Calculs de limites par opérations et par inégalités : (a) Opérations sur les limites finies ou infinies (combinaisons linéaires, produit, quotient). (b) Passage à la limite dans les inégalités **larges** ; (c) Théorème d'encadrement (pour la convergence), théorème de minoration (pour la divergence vers $+\infty$) et théorème de majoration (pour la divergence vers $-\infty$).

   (4) Existence de limites : (a) Limite d'une suite réelle monotone : Théorème de la limite monotone et satellites. (b) Limite commune de deux suites adjacentes : théorème des suites adjacentes, application aux deux sous-suites des termes de rangs pairs et des termes de rangs impairs d'une même suite réelle. (c) Extraction de sous-suites convergentes : théorème de Bolzano-Weierstrass (*démonstration non exigible, mais procédé de dichotomie capital*).

   (5) Caractérisations séquentielles : (b) Borne supérieure ou borne inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$. (a) Densité d'une partie de $\mathbb{R}$.

   (6) Définitions des suites bornées et des suites convergentes puis extension des résultats sur les suites réelles bornées et les suites réelles convergentes (Faute d'un ordre total sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations, il n'y pas d'inégalité entre des complexes mais entre leurs parties réelles, leurs parties imaginaires et leurs modules dans leur ensemble) : nature de $(q^n)_{n\geqslant 0}$, où $q \in \mathbb{C}$.

   (7) Termes généraux de suites complexes particulières : (a) Suite arithmético-géométrique : $u_{n+1} - au_n = b$. (b) Suite à récurrence linéaire homogène d'ordre 2 : $u_{n+2} - su_{n+1} + pu_n = 0$.

   (8) Estimations asymptotiques de suites numériques (intuitions et définitions) : (a) La domination, la négligeabilité, l'équivalence asymptotiques et les notations respectives. (b) Cas particuliers des "grand o de 1" et "petit o de 1". (c) Usage dans le calcul de limites.

2. *Arithmétique des entiers relatifs (questions de cours seulement).*

   (1) Divisibilité dans l'ensemble des entiers relatifs : relation d'ordre partielle sur $\mathbb{N}$, rapport à l'ordre usuel, combinaisons de multiples d'un même entier. (b) Division euclidienne : théorème de la division euclidienne (dans $\mathbb{N}$) et corollaire (dans $\mathbb{Z}$) ; décomposition d'un entier naturel en base entière $b \geqslant 2$.

   (2) PGCD et PPCM : définition et caractérisation comme le plus grand des diviseurs communs positifs pour l'ordre de divisibilité, $\text{PGCD}(ka, kb)$. (b) Algorithme d'Euclide : écriture en langage naturel et exemple de calcul de PGCD suivant cet algorithme.

2 *Exemples* de questions de cours

1. Pour qu'une suite réelle soit convergente il est nécessaire (et suffisant) que toutes ses sous-suites convergent vers une limite commune.
2. Pour qu'une suite réelle (u_n) soit convergente il est nécessaire et suffisant que ses sous-suites des termes de rangs pairs et des termes de rangs impairs converge vers une limite commune.
3. Théorème de la limite monotone : toute suite réelle croissante admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$: soit elle diverge vers $+\infty$ soit elle converge vers le suprémum de ses valeurs.
4. Étant donnée une suite $(c_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers compris entre 0 et $9 = 10 - 1$ qui ne stationne pas à la valeur 9, la suite réelle $\left(\sum_{k=1}^{p} c_k 10^{-k}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et pour tout entier naturel p, la valeur décimale approchée de sa limite à 10^{-p} près est égale à $\sum_{k=1}^{p} c_k 10^{-k}$.
5. Théorème des suites adjacentes : deux suites réelles adjacentes convergent vers une limite commune, et à tout rang les deux termes respectifs encadrent la limite.
6. La suite réelle $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right)$ converge vers un réel strictement positif.
7. Le produit de deux suites complexes convergentes et une suite complexe convergente de limite égale au produit des deux limites..
8. Si une suite complexe (z_n) converge alors elle converge en moyenne de Césaro vers la même limite, i.e. $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lim_{n\to+\infty} z_n$.
9. Théorème de la division euclidienne : Étant donné un entier naturel $b \geqslant 2$, tout entier naturel n s'écrit de manière unique sous la forme $n = r + b \times q$ où r et q sont des entiers naturels tels que $0 \leqslant r < b$ (valable dans le cas trivial où $b = 1$).
10. Pour tous entiers naturels a et b non tous les deux nuls, et k non nul, $\mathrm{PGCD}(ka, kb) = k\,\mathrm{PGCD}(a, b)$.
11. Calculer à la main le PGCD de deux entiers compris entre 10 et 30 en suivant l'algorithme d'Euclide. Justifier.