MPSI 1, N° : 00 NOM : NGAMBOU Test écrit du 06/12/2024 **(20 min)**

1. Suites et fin (encadrer ou souligner les réponses à main levée).

1. Dire que « La suite complexe (u_n) converge vers le complexe l » signifie que ...
   - La suite réelle $(\mathrm{Re}(u_n))$ converge vers le réel $\mathrm{Re}(l)$;
   - **ET** la suite réelle $(\mathrm{Im}(u_n))$ converge vers le réel $\mathrm{Im}(l)$.

2. Pour chaque énoncé, dire en justifiant s'il est vrai ou faux.

   - Toute suite convergente de réels strictement inférieurs à 1 converge vers un réel strictement inférieur à 1.

   Contre-exemple : $(1-10^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$. Faux !

   - Pour qu'une suite complexe (u_n) converge, il est suffisant que la suite réelle $(|u_n|)$ converge.

   Contre-exemple : $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Faux !

   - La suite complexe $\left(e^{i2\pi n\sqrt{2}}\right)$ admet une sous-suite convergente.

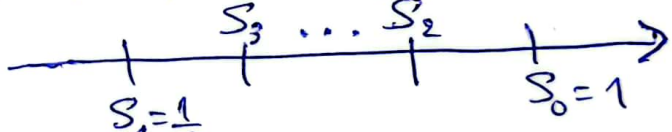
   La suite est bornée ; donc c'est vrai d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. Vrai !

3. Déterminer la limite de $n\ln(n)\,(1-\cos(1/n))$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

On a $1-\cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\infty}{=} \frac{1}{n^2}\times o(1)$ et $\frac{\ln(n)}{n} \underset{n\infty}{=} o(1)$; donc la limite est 0.

4. Montrer que la suite $(S_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right)$ converge vers un réel strictement positif.

On a : • $(S_0, S_2, S_4, \dots)$ et $(S_1, S_3, S_5, \dots)$ sont adjacentes,
• $S_0 = 1$ et $S_1 = \frac{1}{2}$



Donc (S_n) converge et $\lim_{n\infty} S_n \geq \frac{1}{2} > 0$.

5. Soit la suite complexe (u_n) telle que $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0$. Déterminer le terme général de cette suite.

• On a : $\forall r \in \mathbb{C}$, $r^2 - r - 2 = 0 \iff r \in \{-1, 2\}$.

• Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3}$.

2. Sommes et produits (encadrer ou souligner les réponses à main levée).

6. Soit $A = \sum_{k=5}^{104} (3k+1)$. Calculer A.

$$A = \frac{(3\times 5+1) + (3\times 104+1)}{2} \times (1+104-5) = \frac{329\times 100}{2} = 16\,450$$

7. Soit $B = \sum_{l\in[\![-2024,2024]\!]} 10^{-l}$. Calculer B.

$$B = \frac{10^{2024} - 10^{-2025}}{1-10^{-1}} = \frac{10^{2025} - 10^{-2024}}{9}$$

8. Soit $C = \prod_{m=1}^{2024} \sin\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right)$. Calculer C.

$$C = \prod_{m=1}^{2024} (-1)^m = \prod_{k=1}^{1012} \left((-1)^{2k-1}(-1)^{2k}\right) = (-1)^{1012} = 1 \quad \text{car } 1012 = 0 \ [2]$$

9. Soit $D = \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant 10 \\ i\neq j}} ij$. Calculer D.

$$D = \left(\sum_{k=1}^{10} k\right)^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2 = \left(\frac{10\times(10+1)}{2}\right)^2 - \frac{10\times(10+1)\times(2\times 10+1)}{2\cdot 3}$$

$$D = 25\times 11\times 11 - 5\times 11\times 7 = (275-35)\times 11 = 2\,640$$

10. Soient $E = \sum_{n=2}^{4048} \frac{2}{n(n+1)}$. Calculer E.

$$E = 2\sum_{n=2}^{4048}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4048+1}\right) = \frac{4047}{4049}$$

11. Soient $F = \sum_{k=0}^{10} \binom{20}{2k} 9^k$ et $G = \sum_{k=0}^{9} \binom{20}{2k+1} 9^k$. Calculer F et G.

Comme $9 = 3^2$ on a

$$\begin{cases} F + 3G = (1+3)^{20} \\ F - 3G = (1-3)^{20}. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} F = \dfrac{4^{20} + 2^{20}}{2} \\ G = \dfrac{4^{20} - 2^{20}}{6} \end{cases}$$