N.Laillet - W.Ngambou
walter.ngambou@ac-versailles.fr

DM 08
à rendre le lundi 16 décembre

Exercice 1. *Étude d'une suite récurrente*. Étudier la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n}$: on souhaite un dessin, puis l'étude des variations des suites des termes pairs et impairs, et enfin la convergence éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2. *Deux questions d'arithmétique*.

1. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, 6 divise $5n^3 + n$.

2. Démontrer que $\sqrt[3]{5}$ est irrationnel.

Exercice 3. *Une autre preuve du petit théorème de Fermat*. Soit p un nombre premier, soit a un entier premier avec p.

1. Montrer que pour tous entiers m et n,
$$(ma \equiv na[p]) \Leftrightarrow (m \equiv n[p]).$$

2. Démontrer que l'application $\psi : \{a, 2a, \dots, (p-1)a\} \to \{1, 2, \dots, p-1\}$, qui à x associe son reste dans la division euclidienne par p, est une bijection.

3. En déduire que $a \times (2a) \times \cdots \times ((p-1)a) \equiv (p-1)![p]$.

4. Montrer qu'on a alors $(p-1)!(a^{p-1} - 1) \equiv 0[p]$. En déduire que $a^{p-1} \equiv 1[p]$.

5. Montrer qu'alors pour tout entier a, $a^p \equiv a[p]$.

Exercice 4. *Théorème de Wilson*. Soit p un nombre premier différent de 2.

1. Montrer que $(p-1)^2 \equiv 1[p]$.

2. Montrer que $x^2 \equiv 1[p]$ si, et seulement si $x \equiv 1[p]$ ou $x \equiv -1[p]$.

3. Soit n dans $\{1, 2, \dots, p-1\}$ Montrer qu'il existe un unique entier m dans $\{1, 2, \dots, p-1\}$ tel que $mn \equiv 1[p]$. Quand a-t-on $m = n$?

4. Démontrer que $(p-1)! \equiv p-1[p]$.

5. Déduire de ce qui précède une preuve du théorème de Wilson : pour tout entier naturel q, q est premier si, et seulement si $(q-1)! \equiv q-1[q]$.

Exercice 5. On note, pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n) = \{k \in [\![0, n-1]\!],\ k \wedge n = 1\}$ l'ensemble des entiers strictement inférieurs à n et premiers avec n. On note $\varphi(n)$ le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(n)$.

1. Si p est premier et α est dans $\mathbb{N}$, montrer que $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.

2. Soient m et n deux entiers premiers entre eux. Soit θ l'application qui à $k \in \mathcal{P}(mn)$ associe le couple (r, s) où r est le reste de la division euclidienne de k par m et s est le reste de la division euclidienne de k par n.

(a) Montrer que θ est à valeurs dans $\mathcal{P}(m) \times \mathcal{P}(n)$.

(b) Soient (r, s) dans $\mathcal{P}(m) \times \mathcal{P}(n)$. Montrer que le système de congruences
$$\begin{cases} k \equiv r[m] \\ k \equiv s[n] \end{cases}$$
d'inconnue $k \in [\![1, mn]\!]$, admet une unique solution, et que cette solution est dans $\mathcal{P}(mn)$.

(c) Conclure que si n et m sont premiers entre eux, $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

3. Si n est un entier naturel et $\displaystyle\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en facteurs premiers, que vaut $\varphi(n)$?