1 Thèmes

1. *Suites numériques.*

   (1) Calculs de limites par opérations et par inégalités : (a) Opérations sur les limites finies ou infinies (combinaisons linéaires, produit, quotient). (b) Passage à la limite dans les inégalités **larges** ; (c) Théorème d'encadrement (pour la convergence), théorèmes de minoration et de majoration (resp. pour la divergence vers $+\infty$ et $-\infty$).

   (2) Existence de limites : (a) Théorème de la limite monotone pour les suites réelles et satellites. (b) Théorème des suites adjacentes pour les suites réelles et application aux deux sous-suites des termes de rangs pairs et des termes de rangs impairs d'une même suite réelle. (c) Extraction de sous-suites convergentes : théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites réelles ou complexes.

   (3) Caractérisations séquentielles : (a) Borne supérieure ou borne inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$. (b) Densité d'une partie de $\mathbb{R}$.

   (4) Termes généraux de suites complexes particulières : (a) Suite arithmético-géométrique : $u_{n+1} - au_n = b$. (b) Suite à récurrence linéaire homogène d'ordre 2 : $u_{n+2} - su_{n+1} + pu_n = 0$.

   (5) Estimations asymptotiques de suites numériques (intuitions et définitions) : (a) La domination, la négligeabilité, l'équivalence asymptotiques et les notations respectives. (b) Cas particuliers des "grand o de 1" et "petit o de 1". (c) Usage dans le calcul de limites.

2. *Arithmétique des entiers relatifs.*

   (1) Divisibilité dans l'ensemble des entiers relatifs : (a) Relation d'ordre partielle sur $\mathbb{N}$, rapport à l'ordre naturel, combinaisons de multiples d'un même entier. (b) Division euclidienne : théorème de la division euclidienne (dans $\mathbb{N}$) et corollaire (dans $\mathbb{Z}$) ; décomposition d'un entier naturel en base entière $b \geqslant 2$.

   (2) PGCD : (a) Lemme des diviseurs communs et algorithme d'Euclide. (b) PGCD de deux entiers non tous les deux nuls (ou d'un certain nombre d'entiers non tous nuls) : caractérisation par la divisibilité : parmi tous les entiers, les communs diviseurs de deux entiers non tous les deux nuls (ou d'un certain nombre d'entiers non tous nuls) sont exactement les diviseurs de leur PGCD ; PGCD(ka, kb). (b) Algorithme d'Euclide étendu, relation de Bézout.

   (3) Entiers premiers entre eux : (a) Théorème de Bézout pour deux entiers ou pour un certain nombre d'entiers. (b) Produits et quotients : produit d'entiers premiers à un entier non nul ; lemme de Gauss ; forme irréductible d'un rationnel ; produit de deux diviseurs premiers entre eux.

   (4) PPCM : (a) Caractérisation par la divisibilité : parmi tous les entiers les communs multiples de deux entiers tous les deux non nuls (ou d'un certain nombre d'entiers tous non nuls) sont les multiples de leur PPCM ; PPCM(ka, kb). (b) PGCD(a, b)PPCM$(a, b) = ab$.

   (5) Nombres premiers : (a) La suite des nombres premiers : crible d'Ératosthène. (b) Lemme d'Euclide. (c) Théorème fondamental de l'arithmétique (ou de décomposition en facteurs premiers). (d) Extension du théorème fondamental aux entiers naturels non nuls à l'aide des valuations p-adiques : Caractérisation de la divisibilité, PGCD et PPCM.

   (6) Congruences : (a) Représentation des classes de congruence modulo $n \in \mathbb{N}*$. (b) Compatibilité avec l'addition et la multiplication ; tests de divisibilité. (c) Inversion modulaire et relation de Bézout. (d) Coefficients binomiaux et petit théorème de Fermat.

2 *Exemples* de questions de cours

1. Étant donnée une suite $(c_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers compris entre 0 et $9 = 10-1$ qui ne stationne pas à la valeur 9, la suite réelle $\left(\sum_{k=1}^{p} c_k 10^{-k}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et pour tout entier naturel p, la valeur décimale approchée de sa limite à 10^{-p} près est égale à $\sum_{k=1}^{p} c_k 10^{-k}$.
2. Théorème des suites adjacentes : deux suites réelles adjacentes convergent vers une limite commune, et à tout rang les deux termes respectifs encadrent la limite.
3. La suite réelle $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right)$ converge vers un réel strictement positif.
4. Si une suite complexe (z_n) converge alors elle converge en moyenne de Césaro vers la même limite, i.e. $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.
5. Représentation d'un entier naturel en base entière supérieure à 2 (*par une suite à support fini*).
6. Parmi tous les entiers, les communs diviseurs de deux entiers naturels non tous les deux nuls sont exactement les diviseurs de leur PGCD (par récurrence sur un des deux entiers ou sur la valeur de leur minimum).
7. Forme irréductible d'un rationnel (par le lemme Gauss).
8. Pour tous entiers naturels a et b tous les deux non nuls, $\mathrm{PGCD}(a,b)\,\mathrm{PPCM}(a,b) = ab$.
9. Déduction du lemme d'Euclide directement du théorème de la division euclidienne et de la propriété du plus petit élément de $\mathbb{N}$ muni de son ordre naturel.
10. Petit théorème de Fermat.

walter.ngambou@ac-versailles.fr