1. Estimation asymptotique par comparaison des accroissements relatifs

Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites dans $]0,+\infty[$.
On suppose que pour tout entier naturel n suffisamment grand,

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}-b_n}{b_n}.$$

Montrer que

$$a_n \underset{n\infty}{=} O\left(b_n\right)$$

2. Application 1 : comparaison à une suite géométrique

Voir l'exercice 3. du TD8 pour la règle de d'Alembert.

3. Application 2 : comparaison à une suite puissance

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n \overset{\text{def.}}{=} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{1}{4^n} \times \frac{(2n)!}{n!n!}$$

On veut étudier asymptotiquement la suite $(u_n)_n$.

1. Soit $p \in \mathbb{R}$ fixé. Trouver à l'aide d'un calcul de dérivée un équivalent, quand $n \in \mathbb{N}^*$ tend vers l'infini, de
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1$$
2. Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 quand $n \in \mathbb{N}$ tend vers l'infini.
3. Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$ est équivalent à $\dfrac{-1/2}{n}$ quand $n \in \mathbb{N}$ tend vers l'infini.
4. En déduire, à l'aide de l'estimation asymptotique par comparaison des accroissements relatifs, que la suite $(u_n)_n$ est dominée par la suite $\left(n^{-1/4}\right)_n$.