1. Estimation asymptotique par comparaison des accroissements relatifs

Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites dans $]0, +\infty[$.
On suppose que pour tout entier naturel n suffisamment grand,

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n}.$$

Montrer que

$$a_n \underset{n\infty}{=} O(b_n)$$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ (suffisamment grand) tel que

$$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![, \ \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n}.$$

Alors

$$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![, \ \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} - 1.$$

Donc

$$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![, \ \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leqslant \frac{a_n}{b_n}.$$

Ainsi, la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geqslant n_0}$ est décroissante, donc majorée par son premier terme $\frac{a_{n_0}}{b_{n_0}}$.

2. Application 1 : comparaison à une suite géométrique

Voir l'exercice 3. du TD8 pour la règle de d'Alembert.

3. Application 2 : comparaison à une suite puissance

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n \overset{\text{def.}}{=} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{1}{4^n} \times \frac{(2n)!}{n!n!}$$

On veut étudier asymptotiquement la suite $(u_n)_n$.

1. Soit $p \in \mathbb{R}$ fixé. Trouver à l'aide d'un calcul de dérivée un équivalent, quand $n \in \mathbb{N}^*$ tend vers l'infini, de

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1$$

   Quand $n \in \mathbb{N}$ tend vers l'infini,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1 \sim \frac{p}{n}$$

2. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 quand $n \in \mathbb{N}$ tend vers l'infini.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{4^{n+1}} \times \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \times u_n \end{aligned}$$

Donc, comme $u_n \neq 0$, le réel $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est défini et tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. C'est le cas indécidable de la règle de d'Alembert.

3. Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$ est équivalent à $\dfrac{-1/2}{n}$ quand $n \in \mathbb{N}$ tend vers l'infini.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, quand n tend vers l'infini,

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1}{4} \times \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \\
&= \frac{n+1/2}{n+1} \\
&= \left(1 + \frac{1/2}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \\
&= \left(1 + \frac{1/2}{n}\right)\left(1 + \frac{-1}{n} + \frac{1}{n}o(1)\right) \\
&= 1 + \frac{-1/2}{n} + \frac{1}{n}o(1)
\end{aligned}$$

4. En déduire, à l'aide de l'estimation asymptotique par comparaison des accroissements relatifs, que la suite $(u_n)_n$ est dominée par la suite $\left(n^{-1/4}\right)_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = n^{-1/4}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, quand n tend vers l'infini,

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} - \frac{v_{n+1} - v_n}{v_n} &= \frac{-1/2 + 1/4}{n} + \frac{1}{n}o(1) \\
&= \frac{-1/4}{n} + \frac{1}{n}o(1)
\end{aligned}$$

Donc

$$n\left(\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} - \frac{v_{n+1} - v_n}{v_n}\right) \underset{n\infty}{\longrightarrow} -1/4.$$

Or $-1/4 < 0$; donc dès que n est suffisamment grand

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} - \frac{v_{n+1} - v_n}{v_n} \leqslant 0.$$

D'où, d'après la règle de comparaison des accroissements relatifs,

$$u_n = O\left(n^{-1/4}\right).$$