MPSI 1, N° : 00 NOM : NGAMBOU Test écrit du 13/12/2024 (~~20~~ 25 min)

1. Arithmétique des entiers (encadrer ou souligner les réponses).

1. Exprimer en base 10 le nombre $(6; 11; 4)_{12}$.

$(6\times 12+11)\times 12+4 = 83\times 12+4 = \boxed{1\,000}$

2. Exprimer le nombre 2024 en base 12.

$2024 = 8+12\times(0+12\times(2+12\times 1))$: $\boxed{(1;2;0;8)_{12}}$

3. Écrire une relation de Bézout pour le couple $(16, 26)$.

$1 = 5\times 8 - 3\times 13$; donc $\boxed{2 = 5\times 16 - 3\times 26}$

4. Donner un exemple d'une liste de trois entiers relatifs premiers entre eux dans leur ensemble mais non deux à deux.

2 ; 3 ; 2×3

5. On a PGCD$(2023, 2024, 2025) = \cdots 1$
Car ... $1 = 2024 - 2023$

6. On a PPCM$(99, 100) = \cdot 9900$
Car ... $\mathrm{PGCD}(99, 100) = 1$

7. Citer les nombres premiers de carrés inférieurs à 127. L'entier 127 est-il premier ?

$2; 3; 5; 7; 11$. Oui! Car 127 n'est divisible par aucun de ces nombres premiers.

8. Les nombres composés inférieurs à 13 sont :

$4; 6; 8; 9; 10; 12$

9. Remplir la table suivante des valeurs des restes modulo 7 des produits des entiers naturels strictement inférieurs à 7.

·	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

10. Enoncer une suite de propositions à montrer par récurrence pour mettre en évidence que pour tous entiers naturels k et l non tous les deux nuls, $(2^k-1)\wedge(2^l-1) = 2^{k\wedge l}-1$.

- Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on pose
$\mathcal{P}(k) : \forall l\in\mathbb{N}, (k,l)\neq(0,0) \Longrightarrow (2^k-1)\wedge(2^l-1) = 2^{k\wedge l}-1$
- $\boxed{\text{Ou}}$ $\forall n\in\mathbb{N}, \mathcal{Q}(n) : \forall (k,l)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}, \min(k,l)=n \Longrightarrow (2^k-1)\wedge(2^l-1) = 2^{k\wedge l}-1$

2. CalculsSommes et produits (encadrer ou souligner les réponses).

11. Soit $f : x \mapsto 2x^3 + 4x^2 + 3x + 1$. Calculer $f(5)$.

$f(5) = ((2\times 5+4)\times 5+3)\times 5+1 = (14\times 5+3)\times 5+1 = \boxed{366}$

12. Soit $A = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1}}}}$. Calculer A.

$1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $1+\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$; $1+\frac{3}{5} = \frac{8}{5}$: $\boxed{A = \frac{8}{5}}$

13. Soit $B = 2021 \times 2028 - 2022 \times 2026$. Calculer B.

On pose $N = 2021$.
$N(N+7) - (N+1)(N+5) = N-5$: $\boxed{B = 2016}$

14. Soit $C = \sqrt{7-\sqrt{13}} - \sqrt{7+\sqrt{13}}$. Calculer C^2 puis simplifier C.

$C^2 = 7-\sqrt{13} - 2\sqrt{7^2-13} + 7+\sqrt{13} = 14 - 2\times 6 = 2$

Or $C<0$; donc $\boxed{C = -\sqrt{2}}$

15. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n \in [0;1]$, $1-(1-x_1)\cdots(1-x_n) \leqslant x_1 + \cdots + x_n$.

* Soit $x_1 \in [0;1]$. On a $1-(1-x_1) \leq x_1$.

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n>1$. Soient $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n \in [0;1]$.

On a

$$1-(1-x_1)\cdots(1-x_{n-1})(1-x_n)$$
$$= [1-(1-x_1)\cdots(1-x_{n-1})] + \underbrace{(1-x_1)\cdots(1-x_{n-1})}_{\in [0;1]} x_n$$
$$\leq [1-(1-x_1)\cdots(1-x_{n-1})] + x_n$$

* Ainsi démontre-t-on la proposition par récurrence.