TD 10
Limites de fonctions – continuité

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\lfloor x \rfloor}$
2. $\lim_{x\to 2^+} (x-2)\ln(x-2)$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin(x))}{\sin(x)}$
4. $\lim_{x\to 0} x\ln(1+e^x)$
5. $\lim_{x\to 0} (2^x)^{\ln(x)}$

Exercice 2. ●○○ Déterminer les limites des quantités suivantes aux points indiqués.

1. $\frac{x}{\lfloor x \rfloor}$ en $+\infty$.
2. $\frac{\sin(x)}{\mathrm{sh}(x)}$ en 0 et en $+\infty$
3. $(x^x)^x$ et $x^{(x^x)}$ en 0
4. $x^a \ln(1+\sin(x^2))$ en 0 (en fonction de la valeur de $a \in \mathbb{R}$)
5. $\frac{e^x - e^2}{\ln(x)-\ln(2)}$ en 2.
6. $\sin(x)^x - 1$, puis $\cos(\sqrt{x})$, puis $\sin(x)^x - \cos(\sqrt{x})$ en 0.
7. $\sin(x)^x - 1$, puis $\cos(x)$, puis $\sin(x)^x - \cos(x)$ en 0.
8. $\left(\frac{a+x}{x}\right)^x$ en 0 et en $+\infty$, où a est un réel strictement positif.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues en 0 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(2x).$$

Exercice 4. Soit $f : x \mapsto \frac{x\ln(x)}{x-1}$. Donner l'ensemble de définition de f et étudier son (ses) éventuel(s) prolongement(s) par continuité possible(s).

Exercice 5. Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$.

1. On suppose que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Montrer que f admet un point fixe dans $[a, b]$.
2. On suppose maintenant que $[a, b] \subset f([a, b])$. Montrer que f admet un point fixe dans $[a, b]$.

2 Exercices à faire en TD

Plan de travail Ici, trois types d'exercices :

1. Des exercices uniquement sur les limites et l'asymptotique : les exercices 6 et 7.
2. Dans les premiers exercices sur la continuité (sous-section 2.2), il n'y a jamais à utiliser de ε : les plus importants sont les 9 et 10. Les exercices 11 et 12 sont du même type que 4 (à faire si l'exercice 4 a mal été compris).

3. Enfin, la dernière section, 2.3, permet d'utiliser les théorèmes généraux sur la continuité (comme l'exercice 5) : les plus importants sont les 15, 16 et 17, qui permettent de réviser les théorèmes importants de cours.

2.1 Limites

Exercice 6. ◐○○ - ●◐○ Déterminer les limites suivantes, quand elles existent. Si la limite n'existe pas, montrer pourquoi elle n'existe pas.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x)\ln(\ln(x))$
4. $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+1}{\sin(x)}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(\ln(x+1))-\sin(\ln(x))$

Exercice 7. ●○○ Déterminer les limites suivantes à l'aides de relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x}+x^2}{x-\ln x}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\ln x - x}{x+\cos x}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{xe^x-x^2}}{e^x+e^{-x}}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin^3(x)}{1-\sqrt{1+3x^3}}$
5. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin^3(x)}{1-\sqrt{1+3x^3}}$
6. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\ln(x-2)}{e^x-e^3}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)-\ln(x)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)-\ln(x)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

Exercice 8. ●●○ Déterminer toutes les $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telles que $\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ |f(x)-f(y)| \leqslant \frac{x}{y}$.

2.2 Continuité : définition

Exercice 9. ●○○ Étudier la continuité des applications suivantes :

1. $f : x \mapsto x + \sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$,
2. $g : x \mapsto x - \lfloor x\rfloor - (x-\lfloor x\rfloor)^2$.

Exercice 10. ●○○ Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Montrer que $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont continues sur I. On pourra pour cela réutiliser l'expression de max et min à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 11. ●◐○ Étudier la continuité ainsi que le possible prolongement aux bornes des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$
2. $x \mapsto (x|\ln(x)|+1)^{\ln(x)}$

Exercice 12. ●◐○ Pour quelles valeurs de $\alpha\in\mathbb{R}$ l'application $f : x\mapsto x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 13. *Quelques équations fonctionnelles*. ●●○

1. Déterminer toutes les $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(xy) = f(x) + f(y)$.
2. Déterminer toutes les $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(xy) = f(x)f(y)$.

Exercice 14. ●●◐ Construire une bijection de $[0, 1]$ dans lui-même discontinue en tout point.

2.3 Continuité : théorèmes généraux

Exercice 15. ●○○ Soit f une fonction continue sur un intervalle telle que $|f|$ est constante. Montrer que f est constante.

Exercice 16. ●●○ Soient f et g deux applications continues sur un segment $[a, b]$ avec $a < b$. On suppose que pour tout x de $[a, b]$, $f(x) < g(x)$.

1. Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\forall x \in [a, b],\ f(x) + k < g(x)$.
2. Le résultat reste-t-il vrai si on prend un intervalle ouvert ?

Exercice 17. ●●○

1. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe un réel x_0 de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)$.
2. Une personne fait un tour de 6 km en 40 minutes. Montrer qu'il existe une portion de chemin de 3 km qu'elle a parcourue en 20 minutes.
3. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, il existe x_0 dans $[0, 1]$ tel que $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)$.
4. Montrer en revanche que le résultat précédent est faux si on remplace $\frac{1}{n}$ par $a \in \mathbb{R}$ quelconque.

Exercice 18. ●◐○ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \geqslant a|x - y|.$$

Montrer que f est bijective.

Exercice 19. ●●○ Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue telle que $f \circ f = f$. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment. Décrire l'allure de f.

Exercice 20. ●●○ Existe-t-il une bijection continue de $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$? Une surjection ?

Exercice 21. ●●○ Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On suppose de plus qu'il existe $n \geqslant 2$ tel que

$$\forall x \in [0, 1], f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}(x) = x.$$

Montrer que $\forall x \in [0, 1],\ f(x) = x$. (on s'intéressera à l'injectivité et donc à la monotonie de f).

Exercice 22. ●●● Soit f une surjection continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que tout réel admet une infinité d'antécédents par f.

Indications

3. **1.** (a) Poser $x' = \dfrac{x}{2}$.
   (b) Faire une récurrence.
   (c) Utiliser la continuité de f en 0.
   2. Juste bien rédiger.
5. **1.** Poser $g : x \mapsto f(x) - x$.
   2. Deux possibilités : ou bien utiliser le fait que a et b ont des antécédents par f, ou bien utiliser le fait que f atteigne ses bornes.
6. **1.** Utiliser la quantité conjuguée.
   2. Montrer qu'il n'y a pas de limite en utilisant une définition séquentielle.
   3. Utiliser proprement les croissances comparées.
   4. Faire un encadrement.
   5. Se rendre compte qu'un encadrement ne marche pas... Mais que vaut ce terme quand $x > 1$?
   6. Différencier les limites en $0+$ et $0-$
   7. Que vaut $\sin(p) - \sin(q)$?
8. Faire une analyse-synthèse : d'abord fixer y et faire tendre x vers 0, puis conclure.
9. Regarder la limite en un point qui n'est pas dans $\mathbb{Z}$, puis en un point entier en différenciant les limites à gauche et à droite.
10. Utiliser la définition du maximum et du minimum en termes de valeurs absolues.
11. Utiliser les théorèmes généraux pour les points non problématiques, puis faire des déterminations de limite pour étudier les prolongements par continuité.
12. Distinguer les cas $\alpha > 0$ et $\alpha \leqslant 0$. Pour l'un des deux cas, encadrer, et pour l'autre utiliser la définition séquentielle.
13. Essayer, à l'aide de fonctions usuelles, de se ramener à l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)+f(y)$.
14. Essayer de définir une fonction sur les rationnels et sur les irrationnels.
15. Raisonner par l'absurde en supposant que f change de signe, et **faire un dessin** pour comprendre quel théorème utiliser.
16. Utiliser $f - g$ et le fait que cette fonction atteint son maximum et mon minimum.
17. **1.** Utiliser $g : x \mapsto f(x) - f\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$.
    2. Poser une fonction modélisant le problème et s'annulant en 0 et en 1.
    3. Poser $g : x \mapsto f(x) - f\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$ et regarder $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$.
    4. Utiliser un sin.
18. Montrer que f est injective, puis qu'elle est continue, puis qu'elle est bijective.
19. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est $f([0, 1])$.
20. Pour la bijection, penser à la stricte monotonie. Pour la surjectivité, penser à construire quelque chose à partir de $\dfrac{\sin(x)}{x}$.
21. Démontrer la stricte monotonie, puis supposer qu'on a un x tel que $x < f(x)$ ou que $f(x) < x$.
22. Montrer que $\forall y \in \mathbb{R},\ \forall A > 0, \exists x \geqslant A,\ f(x) = y$.