TD 10
Limites de fonctions – continuité

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\lfloor x \rfloor}$
2. $\lim_{x\to 2^+} (x-2)\ln(x-2)$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin(x))}{\sin(x)}$
4. $\lim_{x\to 0} x\ln(1+e^x)$
5. $\lim_{x\to 0} (2^x)^{\ln(x)}$

Exercice 2. ●○○ Déterminer les limites des quantités suivantes aux points indiqués.

1. $\frac{x}{\lfloor x \rfloor}$ en $+\infty$.
2. $\frac{\sin(x)}{\mathrm{sh}(x)}$ en 0 et en $+\infty$
3. $(x^x)^x$ et $x^{(x^x)}$ en 0
4. $x^a \ln(1+\sin(x^2))$ en 0 (en fonction de la valeur de $a \in \mathbb{R}$)
5. $\frac{e^x - e^2}{\ln(x)-\ln(2)}$ en 2.
6. $\sin(x)^x - 1$, puis $\cos(\sqrt{x})$, puis $\sin(x)^x - \cos(\sqrt{x})$ en 0.
7. $\sin(x)^x - 1$, puis $\cos(x)$, puis $\sin(x)^x - \cos(x)$ en 0.
8. $\left(\frac{a+x}{x}\right)^x$ en 0 et en $+\infty$, où a est un réel strictement positif.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues en 0 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(2x).$$

Exercice 4. Soit $f : x \mapsto \frac{x\ln(x)}{x-1}$. Donner l'ensemble de définition de f et étudier son (ses) éventuel(s) prolongement(s) par continuité possible(s).

Correction 1. $x \mapsto \frac{x\ln(x)}{x-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$ par les théorèmes généraux.

En 0, on a $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$, donc $\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(x)}{x-1} = 0$, donc la fonction est prolongeable par continuité en 0.

En 1, on écrit $\frac{x\ln(x)}{x-1} = \frac{(y+1)\ln(y+1)}{y}$ avec $y = x-1$. Or,

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(y+1)-\ln(1)}{y+1-1} = \ln'(0+1) = 1.$$

Donc $\lim_{y\to 0} \frac{(y+1)\ln(y+1)}{y} = 1$. Donc la fonction est prolongeable par continuité en 1.

Exercice 5. Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$.

1. On suppose que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Montrer que f admet un point fixe dans $[a, b]$.

   Correction 2. Définissions la fonction g de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in [a, b],\ g(x) = f(x) - x$. Alors g est continue, $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ car $f(a) \in [a, b]$, et $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. Donc g change de signe sur $[a, b]$, donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule sur $[a, b]$, donc il existe x_0 dans $[a, b]$ tel que $g(x_0) = 0$, i.e. $f(x_0) = x_0$.

2. On suppose maintenant que $[a, b] \subset f([a, b])$. Montrer que f admet un point fixe dans $[a, b]$.

   Correction 3. On sait que $[a, b] \subset f([a, b])$, donc on dispose de α et β dans $[a, b]$ tels que $a = f(\alpha)$ et $b = f(\beta)$. Supposons $\alpha \leqslant \beta$ et définissons la fonction g sur $[a, b]$ comme précédemment. Alors $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = a - \alpha \leqslant 0$ car $\alpha \in [a, b]$. De même, $g(\beta) = f(\beta) - \beta = b - \beta \geqslant 0$ car $\beta \in [a, b]$. Donc g change de signe sur $[\alpha, \beta]$, donc par le TVI il existe x_0 dans $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ tel que $g(x_0) = 0$, i.e. $f(x_0) = x_0$.

2 Exercices à faire en TD

Plan de travail Ici, trois types d'exercices :

1. Des exercices uniquement sur les limites et l'asymptotique : les exercices 6 et 7.
2. Dans les premiers exercices sur la continuité (sous-section 2.2), il n'y a jamais à utiliser de ε : les plus importants sont les 9 et 10. Les exercices 11 et 12 sont du même type que 4 (à faire si l'exercice 4 a mal été compris).
3. Enfin, la dernière section, 2.3, permet d'utiliser les théorèmes généraux sur la continuité (comme l'exercice 5) : les plus importants sont les 15, 16 et 17, qui permettent de réviser les théorèmes importants de cours.

2.1 Limites

Exercice 6. ◐○○ - ●◐○ Déterminer les limites suivantes, quand elles existent. Si la limite n'existe pas, montrer pourquoi elle n'existe pas.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.
2. $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
3. $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x)\ln(\ln(x))$
4. $\lim\limits_{x \to 0} x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+1}{\sin(x)}$
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin(\ln(x+1)) - \sin(\ln(x))$

Correction 4. 1. On multiplie par la quantité conjuguée pour écrire

$$\begin{aligned}\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) &= \sqrt{x}\frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. Fait en cours, la fonction n'a pas de limite !
3. On sait que pour tout y, $y\ln(y) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc, comme $\ln(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$, $\ln(x)\ln(\ln(x)) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$.
4. On sait que pour tout x dans $\mathbb{R}^*$,
$$\frac{1}{x} - 1 \leqslant \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}.$$
Si $x > 0$,
$$1 - x \leqslant x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant 1,$$
donc, par encadrement, $x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$. De même, si $x < 0$,
$$1 - x \geqslant x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geqslant 1,$$
donc, par encadrement, $x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 1$.
Donc, comme 0 n'est pas dans l'ensemble de définition de $x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$, on en déduit que
$$x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$$
5. Soit $x > 1$. Alors $\frac{1}{x} \in [0, 1[$ donc $x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$, donc $x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$ sur un voisinage de $+\infty$ donc $x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
6. On sait que $\lim_{x\to 0^-} \sin(x) = 0^-$ et $\lim_{x\to 0^+} \sin(x) = 0^+$. Donc
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{\sin(x)} = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{\sin(x)} = +\infty.$$
7. Pour tous réels p et q, $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$, donc
$$\begin{aligned}\sin(\ln(x+1)) - \sin(\ln(x)) &= 2\sin\left(\frac{\ln(x+1)-\ln(x)}{2}\right)\cos\left(\frac{\ln(x+1)+\ln(x)}{2}\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\cos\left(\frac{\ln(x(x+1))}{2}\right).\end{aligned}$$
Or, $\cos\left(\frac{\ln(x(x+1))}{2}\right)$ est borné et $\sin\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\sin(\ln(x+1)) - \sin(\ln(x)) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 7. ●○○ Déterminer les limites suivantes à l'aides de relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence.

 walter.ngambou@ac-versailles.fr

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x}+x^2}{x-\ln x}$

Correction 5. $\displaystyle\frac{xe^{-x}+x^2}{x-\ln x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{x} = x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x - x}{x+\cos x}$

Correction 6. $\displaystyle\frac{x\ln x - x}{x+\cos x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x\ln(x)}{x} = \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{xe^x - x^2}}{e^x+e^{-x}}$

Correction 7. $\displaystyle\frac{\sqrt{xe^x - x^2}}{e^x+e^{-x}} \sim \frac{\sqrt{xe^x}}{e^x} = \sqrt{\frac{x}{e^x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin^3(x)}{1-\sqrt{1+3x^3}}$

Correction 8. **Attention** au point en lequel on prend les équivalents ! Ici on est en $+\infty$.

$$\frac{\sin^3(x)}{1-\sqrt{1+3x^3}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sin^3(x)}{-\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

5. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\sin^3(x)}{1-\sqrt{1+3x^3}}$

Correction 9. **Ici, on peut utiliser les équivalents usuels.**

$$\frac{\sin^3(x)}{1-\sqrt{1+3x^3}} \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^3}{-\frac{3x^3}{2}} = -\frac{2}{3}.$$

6. $\displaystyle\lim_{x\to3} \frac{\ln(x-2)}{e^x-e^3}$

Correction 10. Ici, il faut faire une translation pour revenir au point en lequel on prend les équivalents.

$$\frac{\ln(x-2)}{e^x-e^3} = \frac{\ln(1+(x-3))}{e^3(e^{x-3}-1)}.$$

On pose alors $y = x-3$. On a donc, quand $x\to3$, $y\to0$. Donc

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+(x-3))}{e^3(e^{x-3}-1)} &= \frac{\ln(1+y)}{e^3(e^y-1)} \\ &\underset{y\to0}{\sim} \frac{y}{e^3\times y} = e^{-3}.\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to3} \frac{\ln(x-2)}{e^x-e^3} = e^{-3}.$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1) - \ln(x)}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$

8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+1) - \ln(x)}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$

Exercice 8. ●●○ Déterminer toutes les $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telles que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{x}{y}$.

Correction 11. On procède par analyse-synthèse.
Analyse. Soit f une fonction vérifiant la relation précédente. Soit y dans $\mathbb{R}$. Alors pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{x}{y}$. En faisant tendre x vers 0 et par encadrement, on obtient que f admet une limite quand x tend vers 0, égale à $f(y)$. Ceci étant valable pour tout y de $\mathbb{R}_+^*$, on déduit, par unicité de la limite, que la fonction f est constante.

2.2 Continuité : définition

Exercice 9. ●○○ Étudier la continuité des applications suivantes :

1. $f : x \mapsto x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$,

Correction 12. Si $a \notin \mathbb{Z}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue en a, donc, par les théorèmes généraux, f est continue en a.
Si $a \in \mathbb{Z}$, alors $\lim\limits_{x \to a^-} \lfloor x \rfloor = a - 1$ et $\lim\limits_{x \to a^+} \lfloor x \rfloor = a$, donc

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = a + \sqrt{a - (a-1)} = a + 1$$
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = a + \sqrt{a - a} = a.$$

Donc les limites à droite et à gauche de f en a sont différentes, donc f n'est pas continue en a.
Elle est en revanche continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2. $g : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor - (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

Correction 13. Si $a \notin \mathbb{Z}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue en a, donc, par les théorèmes généraux, g est continue en a.
Si $a \in \mathbb{Z}$, alors $\lim\limits_{x \to a^-} \lfloor x \rfloor = a - 1$ et $\lim\limits_{x \to a^+} \lfloor x \rfloor = a$, donc

$$\lim_{x \to a^-} g(x) = a - (a-1) - (1)^2 = 0,$$
$$\lim_{x \to a^+} g(x) = a - a - (0)^2 = 0,$$
$$g(a) = 0,$$

donc g est continue en a. Donc g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10. ●○○ Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Montrer que $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont continues sur I. On pourra pour cela réutiliser l'expression de max et min à l'aide des fonctions usuelles.

Correction 14. L'exercice est en fait simple si on écrit que $\max(f,g) = \dfrac{|f-g|+f+g}{2}$ et $\min(f,g) = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$. La fonction valeur absolue est continue, donc chacune des deux fonctions est continue !

Exercice 11. ●◐○ Étudier la continuité ainsi que le possible prolongement aux bornes des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$

   Correction 15. $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ par les théorèmes généraux. En 0, on étudie
   $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \text{ donc } \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$
   Donc la fonction est prolongeable par continuité en 0.

2. $x \mapsto (x|\ln(x)|+1)^{\ln(x)}$

   Correction 16. Pour tout x tel que $x > 0$,
   $$(x|\ln(x)|+1)^{\ln(x)} = \exp\left(\ln(x)\ln(1+x|\ln(x)|)\right).$$
   La fonction est définie en $x \neq 0$, et est continue en tout point non nul par les théorèmes généraux. En 0, on sait que pour tout X, $\ln(1+X) \leqslant X$, donc
   $$|\ln(x)|\ln(1+x|\ln(x)|) \leqslant x\ln(x)^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$
   donc $(x|\ln(x)|+1)^{\ln(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 12. ●◐○ Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'application $f : x \mapsto x^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Correction 17. On sait que si $\alpha > 0$, $x^\alpha \sin \dfrac{1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc la fonction est prolongeable par continuité si $\alpha > 0$.
Si $\alpha \leqslant 0$, soient $u_n = \dfrac{1}{2\pi n}$ et $v_n = \dfrac{1}{\pi + 2\pi n}$. Alors ces deux suites tendent toutes deux vers 0 et
$$\begin{aligned} u_n^\alpha \sin \frac{1}{u_n} &= (2\pi n)^{-\alpha}\sin(2\pi n) = 0, \\ v_n^\alpha \sin \frac{1}{v_n} &= (\pi+2\pi n)^{-\alpha}\sin(\pi+2\pi n) = (\pi+2\pi n)^{-\alpha}, \end{aligned}$$
qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc la fonction n'a pas de limite en 0, donc n'y est pas prolongeable par continuité.

Exercice 13. *Quelques équations fonctionnelles.* ●●○

1. Déterminer toutes les $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(xy) = f(x) + f(y)$.

Correction 18. On utilise le fait que les $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(xy) = f(x) + f(y)$ sont les fonctions linéaires.
Analyse. Soit f une telle fonction. Posons alors $g : x \mapsto f(e^x)$. Alors g va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et pour tous x et y dans $\mathbb{R}$,

$$g(x + y) = f(e^{x+y}) = f(e^x e^y) = f(e^x) + f(e^y) = g(x) + g(y),$$

et g est continue. Donc g est linéaire, i.e. on dispose de a tel que $g : x \mapsto ax$. Donc si $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = g(\ln(x)) = a\ln(x)$.
Réciproquement, les $x \mapsto a\ln(x)$ sont toutes solution.

2. Déterminer toutes les $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(xy) = f(x)f(y)$.

Correction 19. De même, on considère $h : x \mapsto \ln(f(x))$ alors h va de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et pour tous x et y, $h(xy) = \ln(f(xy)) = \ln(f(x)f(y)) = \ln(f(x)) + \ln(f(y)) = h(x) + h(y)$, donc, par la question précédente, on dispose de a tel que $h : x \mapsto a\ln(x)$, donc $f : x \mapsto e^{h(x)} = e^{a\ln(x)} = x^a$. La synthèse se fait de même.

Exercice 14. ●●◐ Construire une bijection de $[0, 1]$ dans lui-même discontinue en tout point.

Correction 20. On définit la fonction f suivante

$$\forall x \in [0, 1],\ f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - x \text{ si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

La fonction est bijective, car $f \circ f = \mathrm{Id}$. Elle est discontinue en tout point sauf en $\frac{1}{2}$. Si on pose $g = f$ sur $[0, 1]\backslash\{0, 1/2\}$, avec $g(0) = \frac{1}{2}$ et $g(1/2) = 0$, on a la fonction désirée.

2.3 Continuité : théorèmes généraux

Exercice 15. ●○○ Soit f une fonction continue sur un intervalle telle que $|f|$ est constante. Montrer que f est constante.

Correction 21. Supposons que f n'est pas constante. Alors on dispose de x et y tels que $f(x) \neq f(y)$. Mais $|f|$ est constante donc $|f(x)| = |f(y)|$ donc, en particulier, $f(x) \neq 0$ et $f(y) \neq 0$. Mais alors $f(x)$ et $f(y)$ sont de signe (strict) opposé et, par continuité de f et par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe z entre x et y tel que $f(z) = 0$. Mais alors $|f(z)| = 0$, différent de $|f(x)|$ et $|f(y)|$, absurde ! Donc f est constante.

Exercice 16. ●●○ Soient f et g deux applications continues sur un segment $[a, b]$ avec $a < b$. On suppose que pour tout x de $[a, b]$, $f(x) < g(x)$.

1. Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\forall x \in [a, b],\ f(x) + k < g(x)$.

Correction 22. Considérons l'application $h : x \mapsto g(x) - f(x)$. Alors h atteint son minimum sur $[a, b]$, en un point c. Mais alors $h(c) = g(c) - f(c) > 0$. On pose $k = \frac{h(c)}{2}$. Alors pour tout x dans $[a, b]$, $h(x) \geqslant h(c) > \frac{h(c)}{2} = k$, donc pour tout x dans $[a, b]$, $f(x) < k + g(x)$.

2. Le résultat reste-t-il vrai si on prend un intervalle ouvert ?

Correction 23. Non ! On prend $x \mapsto 0$ et $x \mapsto x$ sur $]0, 1[$.

Exercice 17. ●●○

1. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe un réel x_0 de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)$.

Correction 24. Posons $g : x \mapsto f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right)$. Alors $g(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)$, donc $g(0)$ et $g(1)$ sont de signe opposé donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires g s'annule sur $[0, 1]$ donc il existe x_0 dans $[0, 1]$ tel que $g(x_0) = 0$, i.e. $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)$.

2. Une personne fait un tour de 6 km en 40 minutes. Montrer qu'il existe une portion de chemin de 3 km qu'elle a parcourue en 20 minutes.

Correction 25. Soit $f : t \mapsto f(t)$ la distance parcourue par la personne. Soit $g : x \mapsto f(40x) - 6x$. Alors $g(0) = 0$, $g(1) = f(40) - 6 = 6 - 6 = 0$ donc on dispose de x_0 tel que $g(x_0) = g\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)$, i.e.

$$f(40x_0) - 6x_0 = f(40x_0 + 20) - 6x_0 - 3,$$

i.e. $f(40x_0 + 20) - f(40x_0) = 3$, donc la personne a parcouru 3 km entre $40x_0$ et $40x_0 + 20$.

3. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, il existe x_0 dans $[0, 1]$ tel que $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)$.

Correction 26. Posons $g : x \mapsto f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$. Alors

$$\begin{aligned}
&g(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right)\\
&g\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n}\right)\\
&\dots\\
&g\left(1 - \frac{1}{n}\right) = f\left(1 - \frac{1}{n}\right) - f(1),
\end{aligned}$$

donc $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = f(0) - f(1) = 0$ par télescopage, donc on dispose de k_0 tel que $g\left(\frac{1}{k_0}\right)$ et $g\left(\frac{1}{k_0 + 1}\right)$ sont de signe opposé. Donc, par le TVI, g s'annule entre $\frac{1}{k_0}$ et $\frac{1}{k_0 + 1}$, ce qui démontre le résultat désiré.

4. Montrer en revanche que le résultat précédent est faux si on remplace $\frac{1}{n}$ par $a \in \mathbb{R}$ quelconque.

Correction 27. Si a n'est pas l'inverse d'un entier, on pose $f : x \mapsto \left|\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right| - x\left|\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)\right|$. Alors $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ et si $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x+a) - f(x) &= \left|\sin\left(\frac{\pi(x+a)}{a}\right)\right| - (x+a)\left|\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)\right| - \left|\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right| + x\left|\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)\right| \\ &= -a\left|\sin\left(\frac{\pi}{a}\right)\right| \neq 0, \end{aligned}$$

d'où f ne vérifie pas : **«** il existe x_0 dans $[0,1]$ tel que $f(x_0) = f(x_0 + a)$. **»**

Exercice 18. ●◐○ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \geqslant a|x-y|.$$

Montrer que f est bijective.

Correction 28. Montrons que f est injective, puis bijective.

1. f est injective. En effet, soient x et y tels que $f(x) = f(y)$. Alors $a|x-y| \leqslant 0$, i.e. $x = y$. Donc f est injective.
2. f étant continue, elle est donc strictement monotone. Supposons que f est strictement croissante. On a pour tout x réel

$$a|x| \leqslant |f(x) - f(0)| \leqslant |f(x)| + |f(0)| \text{ donc } |f(x)| \geqslant a|x| - |f(0)| \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc par majoration $\lim\limits_{x\to-\infty} |f(x)| = \lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$. Comme f est strictement croissante, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. On en déduit, par le théorème des vaeurs intermédiaires aux limites, que f est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 19. ●●○ Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue telle que $f \circ f = f$. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment. Décrire l'allure de f.

Correction 29. Soit $PF(f)$ l'ensemble des points fixes de f. Montrons que $PF(f) = f([0,1])$.

1. Soit x dans $PF(f)$. Alors $x = f(x)$, donc $x \in f([0,1])$.
2. Soit $y \in f([0,1])$, alors on dispose de $x \in [0,1]$ tel que $y = f(x)$. Mais alors $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$ donc $y \in PF(f)$.

Donc $PF(f) = f([0,1])$.
Mais f est continue sur $[0,1]$, donc elle atteint son minimum m et son maximum M sur $[0,1]$, donc $f([0,1]) = [m,M]$. Donc $PF(f) = [m,M]$ est un segment.

Exercice 20. ●●○ Existe-t-il une bijection continue de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$? Une surjection ?

Correction 30. Une bijection continue de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$ est strictement monotone, donc est majorée ou minorée sur $[0,1]$ donc ne peut pas être surjective dans $\mathbb{R}$.

En revanche, si on enlève l'hypothèse d'injectivité, prenons $f : x \mapsto \dfrac{\sin(1/x)}{x}$. Cette fonction est définie de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et on peut montrer qu'elle n'a pas de limite et n'est pas bornée au voisinage de 0 : si l'on prend $u_n = \dfrac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, alors $f(u_n) = (2\pi n + \pi/2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et si l'on prend $v_n = \dfrac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{2}}$, $f(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Cette fonction est donc une bijection de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Maintenant, en prenant $g : x \mapsto f(1-x)$, on obtient une bijection de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$! !

Exercice 21. ●●○ Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On suppose de plus qu'il existe $n \geqslant 2$ tel que

$$\forall x \in [0,1], f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}(x) = x.$$

Montrer que $\forall x \in [0,1],\ f(x) = x$. (on s'intéressera à l'injectivité et donc à la monotonie de f).

Correction 31. Montrons que f est injective. Soient x et y deux réels tels que $f(x) = f(y)$. Alors, si $n \geqslant 2$, $f^{n-1}(f(x)) = f^{n-1}(f(y))$, i.e. $f^n(x) = f^n(y)$, i.e. $x = y$. Donc f est injective sur $[0,1]$. Étant continue sur $[0,1]$, elle est strictement monotone (donc strictement croissante car $f(0) < f(1)$.
Soit alors $x \in [0,1]$. Supposons que $f(x) \neq x$, par exemple $f(x) < x$. Alors par croissance stricte de f, $f^2(x) < f(x)$, donc $f^2(x) < x$. On montre par une récurrence immédiate que pour tout entier k, $f^k(x) < x$. En particulier $f^n(x) < x$, i.e. $x < x$, absurde. D'où le résultat.
La preuve s'adapte si $f(x) > x$.

Exercice 22. ●●● Soit f une surjection continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que tout réel admet une infinité d'antécédents par f.

Correction 32. Montrons la proposition suivante :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \forall A > 0, \exists x \geqslant A,\ f(x) = y.$$

Cela assurera que chaque réel y a une suite d'antécédents tendant vers $+\infty$: il suffira de construire (x_n) avec x_0 un antécédent de y et pour tout n, x_{n+1} un antécédent de y supérieur à $x_n + 1$.
Soit alors $y \in \mathbb{R}, A > 0$. Sur $[0,A]$, f atteint son maximum M et son minimum m.

- Si $y \geqslant f(A)$, soit $z > M + 1$. Alors z admet un antécédent par f, qui n'est pas dans $[0,A]$. Donc on dispose de x dans $[A,+\infty[$ tel que $f(x) = z$. On a alors $f(A) \leqslant y \leqslant f(x)$, donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, on dispose de $x_0 \in [A,x]$ tel que $y = f(x_0)$. D'où la proposition souhaitée.
- Si $y \leqslant f(A)$ on fait de même avec $z < m - 1$.

Le résultat est donc prouvé.