W.N.

Soit à résoudre l'équation

$$29x - 11y = 1$$

d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$.

Suivant l'algorithme d'Euclide étendu, on écrit

$$\begin{cases} 29 = 1.29 + 0.11 \\ 11 = 0.29 + 1.11 \end{cases}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \begin{cases} -4 = 1.29 + (-3).11 \\ 11 = 0.29 + 1.11 \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \begin{cases} -4 = 1.29 + (-3).11 \\ -1 = 3.29 + (-8).11 \end{cases}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2 \begin{cases} 0 = (-11).29 + 29.11 \\ -1 = 3.29 + (-8).11 \end{cases}$$

Donc $\begin{bmatrix} 29 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 11 \\ -8 & 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

On pose
$$P = \begin{bmatrix} -3 & 11 \\ -8 & 29 \end{bmatrix}.$$
Alors l'application
$$f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2$$
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \longmapsto P\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_0 + 11y_0 \\ -8x_0 + 29y_0 \end{pmatrix}$$
est bijective car
$$\begin{vmatrix} -3 & 11 \\ -8 & 29 \end{vmatrix} = -3 \times 29 - (-8) \times 11 = \underline{\underline{1}}.$$
Ainsi, pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$,
$$29x - 11y = 1$$
$$\iff \begin{pmatrix} 29 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$
$$\iff \begin{pmatrix} 29 & -11 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 1$$
$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 1$$
$$\iff x_0 = 1$$
où $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = f^{-1}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$.

C'est que, pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$

$29x - 11y = 1$

$\iff \exists \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 /$
$\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_0 + 11y_0 \\ -8x_0 + 29y_0 \end{pmatrix} \\ x_0 = 1 \end{cases}$

$\iff \exists y_0 \in \mathbb{Z} /$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 11y_0 \\ -8 + 29y_0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{Réponse : } \left\{ \begin{pmatrix} -3 + 11y_0 \\ -8 + 29y_0 \end{pmatrix} : y_0 \in \mathbb{Z} \right\}}$$

Soit à résoudre l'équation

$$5x - 3y + 8z = 1$$

d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3$.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3$. On a

$$5x - 3y + 8z = 1$$

$$\iff 2x + 3x - 3y + 2 \cdot 3z + 2z = 1$$

$$\iff 2x' - 3y' + 2z' = 1$$

$$\left(\text{où } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x + y - 2z \\ z \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. \text{et } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ x' + y' + 2z' \\ z' \end{pmatrix} \right)$$

$$\iff 2x' - 2y' - y' + 2z' = 1$$

$$\iff 2x'' - y'' + 0.z'' = 1$$

$$\left(\text{où } \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - y' + z' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right.$$

$$\text{et} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' + y'' - z'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0.x^{(3)} - y^{(3)} + 0.z^{(3)} = 1$$

$$\text{où} \quad \begin{pmatrix} x^{(3)} \\ y^{(3)} \\ z^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ -2x'' + y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(3)} \\ 2x^{(3)} + y^{(3)} \\ z^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y^{(3)} = -1 \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^{(3)} + y^{(3)} - z^{(3)} \\ 2x^{(3)} + y^{(3)} \\ z^{(3)} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^{(3)} + y^{(3)} - z^{(3)} \\ 5x^{(3)} + 2y^{(3)} + z^{(3)} \\ z^{(3)} \end{pmatrix} \end{cases}$$

C'est que

$$5x - 3y + 8z = 1$$

$$\iff \exists (x^{(3)}, z^{(3)}) \in \mathbb{Z}^2 /$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 3x^{(3)} - z^{(3)} \\ -2 + 5x^{(3)} + z^{(3)} \\ z^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Réponse : } \left\{ \begin{pmatrix} -1 + 3k - l \\ -2 + 5k + l \\ l \end{pmatrix} : (k, l) \in \mathbb{Z}^2 \right\}}$$

Soit à résoudre l'équation

$$5x - 3y + 8z = 1$$

d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3$.

On écrit, comme dans l'algorithme d'Euclide étendu,

$$\begin{cases} 5 = 1.5 + 0.3 + 0.8 \\ 3 = 0.5 + 1.3 + 0.8 \\ 8 = 0.5 + 0.3 + 1.8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array} \begin{cases} -1 = 1.5 + (-2).3 + 0.8 \\ 3 = 0.5 + 1.3 + 0.8 \\ -1 = (0).5 + (-3).3 + 1.8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \begin{cases} -1 = 1.5 + (-2).3 + 0.8 \\ 0 = 3.5 + (-5).3 + 0.8 \\ 0 = (-1).5 + (-1).3 + 1.8 \end{cases}$$

C'est que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

ou encore

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Or l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^3 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^3 \\ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -1x_0 + 3y_0 - 1z_0 \\ -2x_0 + 5y_0 + 1z_0 \\ 0x_0 + 0y_0 + 1z_0 \end{pmatrix} \end{array}$$

est inversible (comme composée d'applications inversibles par construction ou vérification "à la main") ; donc

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3, \quad 5x - 3y + 8z = 1$$

$$\iff \exists (y_0, z_0) \in \mathbb{Z}^2 / \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 3y_0 - z_0 \\ -2 + 5y_0 + z_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Réponse : } \left\{ \begin{pmatrix} -1 + 3k - \ell \\ -2 + 5k + \ell \\ \ell \end{pmatrix} : (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2 \right\}}$$