1 Thèmes

1. *Arithmétique des entiers relatifs.*

   (1) Divisibilité dans l'ensemble des entiers relatifs : (a) Relation d'ordre partielle sur $\mathbb{N}$, rapport à l'ordre naturel, combinaisons de multiples d'un même entier. (b) Division euclidienne : théorème de la division euclidienne (dans $\mathbb{N}$) et corollaire (dans $\mathbb{Z}$) ; décomposition d'un entier naturel en base entière $b \geqslant 2$.

   (2) PGCD : (a) Lemme des diviseurs communs et algorithme d'Euclide. (b) PGCD de deux entiers non tous les deux nuls (ou d'un certain nombre d'entiers non tous nuls) : caractérisation par la divisibilité : parmi tous les entiers, les communs diviseurs de deux entiers non tous les deux nuls (ou d'un certain nombre d'entiers non tous nuls) sont exactement les diviseurs de leur PGCD ; PGCD(ka, kb). (b) Algorithme d'Euclide étendu, relation de Bézout (*démontrée par l'algorithme d'Euclide étendu, non exigible à ce stade*)

   (3) Entiers premiers entre eux : (a) Théorème de Bézout pour deux entiers ou pour un certain nombre d'entiers. (b) Produits et quotients : produit d'entiers premiers à un entier non nul ; lemme de Gauss ; forme irréductible d'un rationnel ; produit de deux diviseurs premiers entre eux.

   (4) PPCM : (a) Caractérisation par la divisibilité : parmi tous les entiers les communs multiples de deux entiers tous les deux non nuls (ou d'un certain nombre d'entiers tous non nuls) sont les multiples de leur PPCM ; PPCM(ka, kb). (b) PGCD(a, b)PPCM$(a, b) = ab$.

   (5) Nombres premiers : (a) La suite des nombres premiers : crible d'Ératosthène. (b) Lemme d'Euclide. (c) Théorème fondamental de l'arithmétique (ou de décomposition en facteurs premiers). (d) Extension du théorème fondamental aux entiers naturels non nuls à l'aide des valuations p-adiques : Caractérisation de la divisibilité, PGCD et PPCM.

   (6) Congruences : (a) Représentation des classes de congruence modulo $n \in \mathbb{N}*$. (b) Compatibilité avec l'addition et la multiplication ; tests de divisibilité. (c) Inversion modulaire et relation de Bézout. (d) Coefficients binomiaux et petit théorème de Fermat.

2. *Limites et continuité (d'une fonction numérique de la variable réelle).*

   (1) Définitions et propriétés : (a) Limite en un point de la droite réelle achevée, appartenant à l'intervalle de définition ou extrémité de cet intervalle ; unicité de LA limite. (b) Limite à gauche, limite à droite et limite épointée en un point appartenant à l'intervalle lorsque cela fait sens. (c) Caractérisation séquentielle de la limite.

   (2) Calculs de limites par des opérations et inégalités : (a) Opérations sur les limites finies ou infinies : combinaisons linéaires, produit, quotient et composition des limites. (b) Passage à la limite dans les inégalités **larges**. (c) Théorème d'encadrement (pour la convergence), théorèmes de minoration et de majoration (resp. pour la divergence vers $+\infty$ et $-\infty$). (d) Théorème de la limite monotone (pour les fonctions réelles).

   (3) Continuité (locale) en un point : (a) Cas particulier du calcul des limites. (b) Opérations sur les fonctions continues en un point.

   (4) Continuité (globale) sur un intervalle : (a) Ensemble des fonctions continues sur un intervalle. (b) Recherche d'antécédent : théorème des valeurs intermédiaires...

2 *Exemples* de questions de cours

1. Représentation d'un entier naturel en base entière supérieure à 2 (*par une suite à support fini*).
2. Parmi tous les entiers, les communs diviseurs de deux entiers naturels non tous les deux nuls sont exactement les diviseurs de leur PGCD (par récurrence sur un des deux entiers ou sur la valeur de leur minimum).
3. Forme irréductible d'un rationnel (par le lemme Gauss).
4. Pour tous entiers naturels a et b tous les deux non nuls, $\mathrm{PGCD}(a,b)\,\mathrm{PPCM}(a,b) = ab$.
5. Déduction du lemme d'Euclide directement du théorème de la division euclidienne et de la propriété du plus petit élément de $\mathbb{N}$ muni de son ordre naturel.
6. Petit théorème de Fermat (*divisibilité des coefficients binomiaux comprise*).
7. Caractérisation séquentielle de la tendance/convergence vers une limite finie/un réel en un point fini/-réel.
8. Théorème de la limite monotone pour les fonctions réelles.
9. Étant donnés $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in]0, 10^{-2025}[$, choisir un réel strictement positif η tel que le choix de tout x égal à x_0 à η près suffit pour satisfaire la contrainte « x^2 égal à x_0^2 à ε près » ($x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ implique $x^2 \in [x_0^2 - \varepsilon, x_0^2 + \varepsilon]$).
10. (*Lemme d'annulation en vue du "TVI"*). Étant donnée une fonction réelle f définie et continue sur un segment $[a, b]$, si $f(a) \geqslant 0 \geqslant f(b)$, alors f prend la valeur 0 sur $[a, b]$.