DM09 (avec corrigé)

Avec indications et commentaires.

Exercice 1 (Nature de suite et puissance)**.**

1. Montrer que la suite réelle $\left(\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\times n}\right)_{n\in[\![2,\infty[\![}$ est convergente.

Pour tout entier naturel k supérieur à 2, $1=k-(k-1)$; donc

$$0\leqslant \frac{1}{(k-1)\times k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}.$$

Donc cette suite réelle tend vers le réel 1 en croissant.

QED (Quod Erat Demonstrandum : c'est ce qu'il fallait démontrer).

2. En déduire la nature de la suite réelle $\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)_{n\in[\![1,\infty[\![}$.

Pour tout entier naturel k supérieur à 2,

$$\frac{1}{(k-1)\times k}\geqslant\frac{1}{k^2}\geqslant 0.$$

Donc, d'après ce qui prècède, cette suite réelle est bornée (inférieurement par 1 et et supérieurement par 2) et elle est monotone.

Donc la suite est convergente d'après le théorème de la limite monotone.

3. Montrer que la suite réelle $\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdots+\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}\cdots+\frac{1}{2^n}\right)_{n\in[\![0,\infty[\![}$ est divergente.

Pour tout entier naturel N supérieur à 1,

$$\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\cdots+\frac{1}{N+N-1}+\frac{1}{N+N}\geqslant\frac{1}{N+N}+\frac{1}{N+N}+\cdots+\frac{1}{N+N}+\frac{1}{N+N}\geqslant\frac{1}{2}$$

Donc, pour tout entier naturel n

$$\left(\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\geqslant 1+\frac{n}{2}.$$

Donc cette suite diverge vers $+\infty$ d'après le théorème de minoration pour les limites.

QED.

4. En déduire la nature de la suite réelle $\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}\right)_{N\in[\![1,\infty[\![}$.

D'une part cette suite réelle est monotone croissante ; donc, d'après le théorème de la limite monotone, soit elle converge (vers un certain réel) soit elle diverge vers $+\infty$.

walter.ngambou@ac-versailles.fr

Dautre part, d'après ce qui précède, cette suite admet une sous-suite qui diverge vers $+\infty$.

En somme, cette suite diverge vers $+\infty$.

Donc la suite est divergente.

Exercice 2 (Unicité de l'écriture canonique d'une fonction polynomiale)**.**
Soient deux suites de complexes $(c_0, c_1, \dots, c_k, \dots)$ et $(c'_0, c'_1, \dots, c'_k, \dots)$ à supports finis.
Soient une suite de complexes **non nuls** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 ; puis A l'ensemble de ses valeurs.

On suppose que pour tout réel x de A,

$$c_0 + c_1x^1 + \cdots + c_kx^k + \cdots = c'_0 + c'_1x^1 + \cdots + c'_kx^k + \cdots$$

Montrer que les deux suites de coefficients sont égales : pour tout entier naturel k, $c_k = c'_k$.

On procède comme pour l'unicité de la représentation d'un entier naturel en base entière supérieure à 2. On montre par l'absurde qu'il n'existe pas d'entier naturel k_0 le plus petit possible tel que c_{k_0} ne soit pas égal à c'_{k_0}.

En effet. On suppose qu'il existe un tel entier k_0.
Comme les deux suites sont à supports finis, on choisit N suffisamment grand pour que l'intervalle $[\![0, N]\!]$ contienne les deux supports. En particulier, $N \geqslant k_0$.
Soit un entier naturel n. Comme $a_n \neq 0$, après simplification de la relation ci-haut avec a_n au lieu de x, on obtient

$$c_{k_0} + c_{k_0+1}a_n^1 + \cdots + c_Na_n^{N-k_0} = c'_{k_0} + c'_{k_0+1}a_n^1 + \cdots + c'_Na_n^{N-k_0}$$

Ainsi, d'après les propriétés des opérations sur les limites, par passage à la limite (dans les inégalités larges) quand n tend vers l'infini, on obtient

$$c_{k_0} + c_{k_0+1} \times 0^1 + \cdots + c_N \times 0^{N-k_0} = c'_{k_0} + c'_{k_0+1} \times 0^1 + \cdots + c'_N \times 0^{N-k_0}$$

QED.

Exercice 3 (Continuité et tableau de valeurs : continuité uniforme effective)**.**
Soit A un réel strictement positif (donné).
Soient N un entier naturel non nul, puis $(c_0, c_1, \dots, c_k, \dots, c_{N-1}, c_N)$ une liste de $N+1$ réels (donnés).
Soit f la fonction polynomiale de $[-A, A]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = c_0 + c_1x^1 + \cdots + c_kx^k + \cdots + c_{N-1}x^{N-1} + c_Nx^N.$$

Soit ε un réel strictement positif (donné).

1. Trouver un réel η strictement positif tel que :

pour tous réels x_0 et x du segment $[-A, A]$, si x est égal à x_0 à η près alors $f(x)$ est égal à $f(x_0)$ à ε près ; i.e. si x est à une distance de x_0 inférieure à η alors $f(x)$ est à une distance de $f(x_0)$ inférieure à ε.

Commentaire : Le réel η ne doit dépendre que de A, N, $(c_0, \dots, c_N)$ et ε.

Soit η un réel strictement positif (à choisir).

Soient x_0 et x dans $[-A, A]$.

On suppose que $|x - x_0| \leqslant \eta$.

Soit k un entier naturel non nul. On a :

$$x^k - x_0^k = (x - x_0)(x^{k-1}x_0^0 + x^{k-2}x_0^1 + \cdots + x^{k-\ell}x_0^\ell + \cdots + x^1x_0^{k-2} + x^0x_0^{k-1})$$

Or $|x - x_0| \leqslant \eta$, $|x| \leqslant A$; donc $|x_0| \leqslant A$, on a

$$\left|x^k - x_0^k\right| \leqslant \eta k A^{k-1}$$

On pose $C \stackrel{def.}{=} |c_1| + 2|c_2| A^1 + \cdots + |c_k| k A^{k-1} + \cdots + |c_N| N A^{N-1}$. Alors il est suffisant que $\eta C \leqslant \varepsilon$; donc le choix suivant convient :

$$\eta = \begin{cases} 2A & \text{si } C = 0 \\ \dfrac{\varepsilon}{C} & \text{si } C \neq 0 \end{cases}.$$

(*On étend ce résultat à toute fonction polynomiale du disque des nombres complexes de modules inférieurs à A dans le plan complexe. La même démonstration tient avec $|\cdot|$ désignant le module*).

---

2. Soit $\eta > 0$ un réel satisfaisant à la requête précédente. En déduire un nombre N de points pour qu'un tableau de valeurs de f à $N + 1$ points et à pas constant suffise à évaluer approximativement f en tout point à la précision ε.

Soit un entier naturel N non nul (à choisir). Un tel tableau présente les valeurs de la fonction f en les points :

$$x_k \stackrel{def.}{=} -A + ((A - (-A))/N) \times k = A\frac{2k - N}{N}$$

pour $k = 0, 1, \ldots, N$.

D'après ce qui précède, il est suffisant de choisir N tel le pas $2A/N$ soit inférieur à η, en sorte que toute valeur de f soit égale, à ε près, à au moins une des valeurs de f en les $N + 1$ points distincts $x_0 < x_1 < \cdots < x_N$; donc le choix suivant convient :

$$\boxed{N = \left\lceil \frac{2A}{\eta} \right\rceil}.$$

Exercice 4 (Monotonie, intervalle et continuité)**.**
Soit I un intervalle non trivial de la droite réelle. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer, à l'aide de la caractérisation des intervalles de la droite réelle, que si la fonction f est continue alors son image $f(I)$ est un intervalle.

Commentare : Ceci fait partie du cours de référence (à venir).

On suppose que la fonction f est continue. On vise à montrer que $f(I)$ vérifie la caractérisation des intervalles de la droite réelle.

Soient a' et b' deux réels. On suppose que a' et b' appartiennent tous les deux à $f(I)$. Il faut montrer que $[a', b']$ est inclus dans $f(I)$.

Soit λ un réel quelconque. On suppose que λ est dans l'ensemble $[a', b']$.

Comme a' et b' sont des images par f d'éléments de I, soient deux réels a et b de I tels que $a' = f(a)$ et $b' = f(b)$.

Donc λ est compris entre les deux valeurs de la fonction f sur l'intervalle I que sont $f(a)$ et $f(b)$.

Or la fonction f est définie et continue sur l'intervalle I.

Donc, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, λ est une valeur de f sur I (image d'un réel compris entre a et b).

QED.

---

2. La réciproque de l'implication précédente est-elle vraie ?

(*Réflexe : se représenter la situation de manière sensible !*)

L'implication réciproque est fausse ! La fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ le prouve.

---

3. On suppose que f est monotone : soit croissante, soit décroissante.

Montrer que si la fonction f n'est pas continue alors son image $f(I)$ n'est pas un intervalle.

Indication : On pourra supposer f non continue puis considérer un point de discontinuité de f.

On suppose que f n'est pas continue.

(*Réflexe : énoncer et traduire le but visé !*)

On vise à montrer que $f(I)$ n'est pas un intervalle de la droite réelle ; ce qui revient à dire, d'après la caractérisation des intervalles de la droite réelle, qu'on peut trouver deux valeurs de f et un nombre entre ces deux valeurs qui ne soit pas atteint par f.

Ainsi, soit x_0 de I un point de discontinuité de f.

(*Réflexe : se représenter la situation de manière sensible !*)

Trois cas se présentent.

Cas 1 : On suppose que x_0 est l'extrémité inférieure de I.

D'une part f est discontinue en x_0 ; donc l'image de ce point par f n'est pas la limite à droite de f en ce même point.

D'autre part f est monotone ; donc le théorème de la limite monotone assure $f(x_0+)$ existe et que pour tout point x de I, $f(x)$ n'est pas strictement entre $f(x_0)$ et ce réel $f(x_0+)$.

En somme, $f(x_0)$ n'est pas égal à $f(x_0+)$ et la moyenne arithmétique de ces deux réels est un réel compris entre deux valeurs de f mais qui n'est pas une valeur de f.

Cas 2 : On suppose que x_0 est l'extrémité supérieure de I.

On traite ce cas comme le précédent avec la limite à gauche au lieu de la limite en droite (il s'agit, au départ, de considérer le parcourt de la droite réelle dans le sens/ l'ordre inverse).

Cas 3 : On suppose que x_0 est un point intérieur de I.

Comme f est discontinue en x_0, soit f est discontinue à droite en x_0, soit f est discontinue à gauche en x_0.

C'est que, soit la fonction monotone $f_{[x_0,+\infty[\cap I}$ est discontinue en x_0 et le traitement du cas 1 permet de conclure, soit la fonction monotone $f_{]-\infty,x_0]\cap I}$ est discontinue en x_0 et le traitement du cas 2 permet de conclure.

Somme des cas : En les trois cas, on a atteint le but visé (et annoncé) !

QED.

Exercice 5 (Le discret, le continu et les sommes nulles)**.**
On considère une liste de réels, quelle qu'elle soit.

1. On suppose que cette liste est à valeurs positives.

Montrer que pour que la somme de cette liste soit nulle (i.e. égale à zéro) il est nécessaire et suffisant que cette liste soit nulle (i.e. que toute composante de cette liste soit égale à zéro) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n, \quad a_1 + \cdots + a_n = 0 \iff (a_1 = 0) \wedge \cdots \wedge (a_n = 0).$$

Voir 3.

---

2. Montrer que pour que la somme de cette liste soit positive (i.e. supérieure à zéro) il est nécessaire qu'au moins une des composantes de cette liste soit positive ; et que pour que la somme de cette liste soit négative (i.e. inférieure à zéro) il est nécessaire qu'au moins une des composantes de cette liste soit négative :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad a_1 + \cdots + a_n \geqslant 0 \implies (a_1 \geqslant 0) \vee \cdots \vee (a_n \geqslant 0)$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad a_1 + \cdots + a_n \leqslant 0 \implies (a_1 \leqslant 0) \vee \cdots \vee (a_n \leqslant 0).$$

Voir 3.

---

3. En déduire que pour que la somme de cette liste soit nulle il est nécessaire qu'elle admette au moins une valeur positive et au moins une valeur négative :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \implies \big(\exists i \in [\![1, n]\!], \exists j \in [\![1, n]\!] \ / \ a_i \geqslant 0 \geqslant a_j\big).$$

Argument 1 :

Si des réels sont positifs alors leur somme est un réel positif supérieur à chacun des termes.

Par suite, si des réels sont strictement positifs (resp. strictement négatifs) alors leur somme est un réel strictement positif (resp. strictement négatif). Les implications contraposées des deux dernières correspondent.

Argument 2 :

Quelle que soit l'entier naturel n non nul, pour toute liste de n réels, la somme de cette liste est comprise entre n fois sa plus grande valeur et n fois sa plus petite valeur. Ces résultats s'en suivent.

On considère une fonction continue d'un segment non trivial de la droite réelle dans la droite réelle ; quelle qu'elle soit.

4. On suppose que cette fonction est à valeurs positives.

Montrer que pour que la somme intégrale de cette fonction soit nulle (i.e. égale à zéro) il est nécessaire et suffisant que cette fonction soit nulle (i.e. que toute image par cette fonction soit égale à zéro) :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R}$$
$$a < b \quad \Longrightarrow \quad \Big(\forall f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}_+),\quad \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in [a,b],\ f(x) = 0\Big).$$

Voir 5.

---

5. Adapter les résultats énoncés avec les listes.

(*Réflexe : se représenter la situation de manière sensible : calcul d'aire !*)

Argument 3 :

On adapte l'argument 1 ci-haut précédente en disant que si une fonction définie et continue sur un segment est à valeurs positives alors sa somme intégrale sur ce segment est un réel positif supérieur à la somme intégrale de sur tout segment inclus dans le premier d'après la relation de Chasles et la positivité de l'intégrale. Or si une telle fonction prend au moins une valeur strictement positive alors, par continuité elle est minorée sur un certain segment non trivial par une constante strictement positive.

Argument 4 :

Exercice suivant : Pour toute fonction réelle définie continue sur un segment admet une valeur minimale et une valeur maximale (*à venir : théorème des bornes atteintes*).

Argument 5 :

On se donne une telle fonction puis on considère sa primitive qui s'annule en l'extrémité inférieure du segment. On utilise alors des propriétés du calcul différentiel et intégral.

Exercice 6 (Le discret, le continu et les sommes pondérées)**.**
Soient deux réels a et b tels que le dernier est strictement supérieur au premier.
Soient un entier naturel n ; puis une liste de $n+1$ réels $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ tous compris entre a et b.
Soit f une fonction partant du segment de la droite réelle d'extrémités a et b et arrivant dans la droite réelle.

On suppose que la fonction f est continue.

1. Soit une liste de $n+1$ réels $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$.

On suppose que cette liste est à valeurs positives et qu'elle n'est pas nulle. On admet que la fonction f est bornée et qu'elle atteint ses deux bornes.

Montrer qu'on peut trouver au moins un réel c compris entre a et b tel que l'égalité suivante soit vérifiée :

$$f(x_0)p_0 + f(x_1)p_1 + \cdots f(x_n)p_n = f(c)(p_0 + p_1 + \cdots + p_n).$$

Les réel p_i, pour $i = 0, 1, \ldots, n$, sont tous positifs et non tous nuls ; donc leur somme S est un réel strictement positif. Ainsi on peut considérer l'unique réel A tel que

$$f(x_0)p_0 + f(x_1)p_1 + \cdots f(x_n)p_n = A(p_0 + p_1 + \cdots + p_n).$$

On appelle respectivement m et M les valeurs minimales et maximales des réels $f(x_i)$, pour $i = 0, 1, \dots, n$.

Ainsi, le réel A est entre m et M ; donc A est une valeur intermédiaire de la fonction continue f sur l'intervalle $[a, b]$.

QED, d'après le théorème des valeurs intermédiaire.

---

2. Soit une fonction p qui part du segment de la droite réelle d'extrémités a et b et arrive dans la droite réelle.

On suppose que la fonction p est continue, à valeurs positives et qu'elle n'est pas nulle.

Montrer qu'on peut trouver au moins un réel c compris entre a et b tel que l'égalité suivante soit vérifiée :

$$\int_{[a,b]} f(x)p(x)\mathrm{d}x = f(c) \int_{[a,b]} p(x)\mathrm{d}x.$$

Indication : On admet qu'étant continue sur le segment $[a, b]$, la fonction f admet une valeur minimale et une valeur maximale sur ce segment. C'est le théorème des bornes atteintes (il fait partie des connaissances de référence à venir).

La fonction fp est bien continue d'après les propriétés des opérations sur les limites, donc sa somme intégrale sur le segment $[a, b]$ est bien définie.

La démonstration précédente s'adapte alors à l'aide de la croissance de la somme intégrale.

Exercice 7 (Continuité, min et max)**.**
Pour tout entier naturel n non nul, pour toute liste de n réels $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, on pose

$$\max(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad ; \quad \min(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

1. (*Fait en salle!*) Soient deux réels u et v.

(a) Exprimer la distance $|-u + v|$ entre les réels u et v en fonction de leur maximum $\max(u, v)$ et de leur minimum $\min(u, v)$.

Soit $u \leqslant v$, soit $u \geqslant v$. Dans les deux cas,

$$|-u + v| = -\min(u, v) + \max(u, v).$$

(b) En déduire des expressions de $\max(u, v)$ et $\min(u, v)$ en fonction de u, v et $|-u + v|$.

Comme $u + v = \min(u, v) + \max(u, v)$, il vient
$\max(u, v) = 2^{-1}(u + v + |-u + v|)$ et $\min(u, v) = 2^{-1}(u + v - |-u + v|)$.

(c) En déduire que pour toutes suites réelles $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$, si ces deux suites convergent alors les suites réelles $(\max(a_n, b_n))_n$ et $(\min(a_n, b_n))_n$ convergent respectivement vers
$\max(\lim_{n\infty} a_n, \lim_{n\infty} b_n)$ et $\min(\lim_{n\infty} a_n, \lim_{n\infty} b_n)$.

A cause des formules précédentes, on tire cela des propriétés des opérations sur les limites.

---

2. Soient deux couples de réels (x_1, x_2) et (x'_1, x'_2).

(a) Montrer que $\max(x'_1, x'_2) \leqslant \max(x_1, x_2) + \max(|x'_1 - x_1|, |x'_2 - x_2|)$. En déduire que

$$\left|\max(x'_1, x'_2) - \max(x_1, x_2)\right| \leqslant \max(\left|x'_1 - x_1\right|, \left|x'_2 - x_2\right|).$$

Voir 3a.

(b) En déduire que

$$\left|\min(x'_1, x'_2) - \min(x_1, x_2)\right| \leqslant \max(\left|x'_1 - x_1\right|, \left|x'_2 - x_2\right|).$$

Voir 3a.

(c) Soit un réel ε strictement positif. Déduire de ce qui précède un réel η strictement positif tel que si x'_1 et x'_2 sont respectivement égaux à x_1 et x_2 à la précision η, alors $\max(x'_1, x'_2)$ et $\min(x'_1, x'_2)$ sont respectivement égaux à $\max(x_1, x_2)$ et $\min(x_1, x_2)$ à la précision ε.

Le choix suivant convient : $\eta = \varepsilon$.

3. Soit un entier naturel n non nul ; puis deux listes de n réels $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$.

(a) Montrer les deux inégalités suivantes :

$$\left|\max(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) - \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right| \leqslant \max(\left|x'_1 - x_1\right|, \left|x'_2 - x_2\right|, \ldots, \left|x'_n - x_n\right|)$$
$$\left|\min(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) - \min(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right| \leqslant \max(\left|x'_1 - x_1\right|, \left|x'_2 - x_2\right|, \ldots, \left|x'_n - x_n\right|)$$

Montrons la première inégalité.

On a $x'_1 = x_1 - x_1 + x'_1$.
Donc $x'_1 \leqslant x_1 + |-x_1 + x'_1|$.
Donc $x'_1 \leqslant x_1 + \max(|x'_1 - x_1|, |x'_2 - x_2|, \ldots, |x'_n - x_n|)$.
Donc $x'_1 \leqslant \max(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \max(|x'_1 - x_1|, |x'_2 - x_2|, \ldots, |x'_n - x_n|)$.
Ainsi, on a montré de manière générique que pour tout indice $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$x'_i \leqslant \max(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \max(\left|x'_1 - x_1\right|, \left|x'_2 - x_2\right|, \ldots, \left|x'_n - x_n\right|).$$

Le membre de droite est indépendant de i ; donc

$$\max(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \leqslant \max(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \max(\left|x'_1 - x_1\right|, \left|x'_2 - x_2\right|, \ldots, \left|x'_n - x_n\right|).$$

Donc

$$\max(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) - \max(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant \max(\left|x'_1 - x_1\right|, \left|x'_2 - x_2\right|, \ldots, \left|x'_n - x_n\right|).$$

De même, en échangeant les listes, on obtient

$$\max(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \max(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \leqslant \max(\left|x_1 - x'_1\right|, \left|x_2 - x'_2\right|, \ldots, \left|x_n - x'_n\right|).$$

Or $|z| = \max(-z, z)$ et $|z| = |-z|$ pour tout réel z; et $u - v = -(v - u)$ pour tous réels u et v.

D'où la première inégalité.

Pour la seconde inégalité on peut procéder comme suit :
(1) reprendre le raisonnement précédent en utilisant ce que $z \geqslant -|z|$ pour tout réel z ;
(2) utiliser ce que la valeur minimale est égale à l'opposé de la valeur maximale des opposés.

QED.

(b) En déduire une extension du résultat de 2c.

RAS (Rien à signaler).

***