DM09

Avec indications.

Exercice 1 (Nature de suite et puissance)**.**

1. Montrer que la suite réelle $\left(\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)\times n}\right)_{n\in[\![2,\infty[\![}$ est convergente.

2. En déduire la nature de la suite réelle $\left(\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in[\![1,\infty[\![}$.

3. Montrer que la suite réelle $\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}+1}+\dfrac{1}{2^{n-1}+2}\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)_{n\in[\![0,\infty[\![}$ est divergente.

4. En déduire la nature de la suite réelle $\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{N}\right)_{N\in[\![1,\infty[\![}$.

Exercice 2 (Unicité de l'écriture canonique d'une fonction polynomiale)**.**
Soient deux suites de complexes $(c_0,c_1,\ldots,c_k,\ldots)$ et $(c'_0,c'_1,\ldots,c'_k,\ldots)$ à supports finis.
Soient une suite de complexes **non nuls** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 ; puis A l'ensemble de ses valeurs.

On suppose que pour tout réel x de A,

$$c_0+c_1x^1+\cdots+c_kx^k+\cdots=c'_0+c'_1x^1+\cdots+c'_kx^k+\cdots$$

Montrer que les deux suites de coefficients sont égales : pour tout entier naturel k, $c_k=c'_k$.

Exercice 3 (Continuité et tableau de valeurs : continuité uniforme effective)**.**
Soit A un réel strictement positif (donné).
Soient N un entier naturel non nul, puis $(c_0,c_1,\ldots,c_k,\ldots,c_{N-1},c_N)$ une liste de $N+1$ réels (donnés).
Soit f la fonction polynomiale de $[-A,A]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=c_0+c_1x^1+\cdots+c_kx^k+\cdots+c_{N-1}x^{N-1}+c_Nx^N.$$

Soit ε un réel strictement positif (donné).

1. Trouver un réel η strictement positif tel que :

pour tous réels x_0 et x du segment $[-A,A]$, si x est égal à x_0 à η près alors $f(x)$ est égal à $f(x_0)$ à ε près ; i.e. si x est à une distance de x_0 inférieure à η alors $f(x)$ est à une distance de $f(x_0)$ inférieure à ε.

2. Soit $\eta>0$ un réel satisfaisant à la requête précédente. En déduire un nombre N de points pour qu'un tableau de valeurs de f à $N+1$ points et à pas constant suffise à évaluer approximativement f en tout point à la précision ε.

Exercice 4 (Monotonie, intervalle et continuité)**.**
Soit I un intervalle non trivial de la droite réelle. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer, à l'aide de la caractérisation des intervalles de la droite réelle, que si la fonction f est continue alors son image $f(I)$ est un intervalle.

2. La réciproque de l'implication précédente est-elle vraie ?

3. On suppose que f est monotone : soit croissante, soit décroissante.

Montrer que si la fonction f n'est pas continue alors son image $f(I)$ n'est pas un intervalle.

Indication : On pourra supposer f non continue puis considérer un point de discontinuité de f.

Exercice 5 (Le discret, le continu et les sommes nulles)**.**
On considère une liste de réels, quelle qu'elle soit.

1. On suppose que cette liste est à valeurs positives.

Montrer que pour que la somme de cette liste soit nulle (i.e. égale à zéro) il est nécessaire et suffisant que cette liste soit nulle (i.e. que toute composante de cette liste soit égale à zéro) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n, \quad a_1 + \cdots + a_n = 0 \iff (a_1 = 0) \wedge \cdots \wedge (a_n = 0).$$

2. Montrer que pour que la somme de cette liste soit positive (i.e. supérieure à zéro) il est nécessaire qu'au moins une des composantes de cette liste soit positive ; et que pour que la somme de cette liste soit négative (i.e. inférieure à zéro) il est nécessaire qu'au moins une des composantes de cette liste soit négative :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad a_1 + \cdots + a_n \geqslant 0 \implies (a_1 \geqslant 0) \vee \cdots \vee (a_n \geqslant 0) \\
\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad a_1 + \cdots + a_n \leqslant 0 \implies (a_1 \leqslant 0) \vee \cdots \vee (a_n \leqslant 0).
\end{aligned}$$

3. En déduire que pour que la somme de cette liste soit nulle il est nécessaire qu'elle admette au moins une valeur positive et au moins une valeur négative :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \implies \big(\exists i \in [\![1, n]\!], \exists j \in [\![1, n]\!] \ /\ a_i \geqslant 0 \geqslant a_j\big).$$

On considère une fonction continue d'un segment non trivial de la droite réelle dans la droite réelle ; quelle qu'elle soit.

4. On suppose que cette fonction est à valeurs positives.

Montrer que pour que la somme intégrale de cette fonction soit nulle (i.e. égale à zéro) il est nécessaire et suffisant que cette fonction soit nulle (i.e. que toute image par cette fonction soit égale à zéro) :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R}$$
$$a < b \quad \implies \quad \Big(\forall f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}_+), \quad \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \iff \quad \forall x \in [a,b],\ f(x) = 0\Big).$$

5. Adapter les résultats énoncés avec les listes.

Exercice 6 (Le discret, le continu et les sommes pondérées)**.**
Soient deux réels a et b tels que le dernier est strictement supérieur au premier.
Soient un entier naturel n ; puis une liste de $n+1$ réels $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ tous compris entre a et b.
Soit f une fonction partant du segment de la droite réelle d'extrémités a et b et arrivant dans la droite réelle.

On suppose que la fonction f est continue.

1. Soit une liste de $n+1$ réels $(p_0, p_1, \dots, p_n)$.

On suppose que cette liste est à valeurs positives et qu'elle n'est pas nulle. On admet que la fonction f est bornée et qu'elle atteint ses deux bornes.

Montrer qu'on peut trouver au moins un réel c compris entre a et b tel que l'égalité suivante soit vérifiée :

$$f(x_0)p_0 + f(x_1)p_1 + \cdots f(x_n)p_n = f(c)(p_0 + p_1 + \cdots + p_n).$$

2. Soit une fonction p qui part du segment de la droite réelle d'extrémités a et b et arrive dans la droite réelle.

On suppose que la fonction p est continue, à valeurs positives et qu'elle n'est pas nulle.

Montrer qu'on peut trouver au moins un réel c compris entre a et b tel que l'égalité suivante soit vérifiée :

$$\int_{[a,b]} f(x)p(x)\mathrm{d}x = f(c) \int_{[a,b]} p(x)\mathrm{d}x.$$

Indication : On admet qu'étant continue sur le segment $[a,b]$, la fonction f admet une valeur minimale et une valeur maximale sur ce segment. C'est le théorème des bornes atteintes (il fait partie des connaissances de référence à venir).

Exercice 7 (Continuité, min et max)**.**
Pour tout entier naturel n non nul, pour toute liste de n réels $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, on pose

$$\max(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad ; \quad \min(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

1. (*Fait en salle!*) Soient deux réels u et v.

- **(a)** Exprimer la distance $|-u+v|$ entre les réels u et v en fonction de leur maximum $\max(u,v)$ et de leur minimum $\min(u,v)$.
- **(b)** En déduire des expressions de $\max(u,v)$ et $\min(u,v)$ en fonction de u, v et $|-u+v|$.
- **(c)** En déduire que pour toutes suites réelles $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$, si ces deux suites convergent alors les suites réelles $(\max(a_n, b_n))_n$ et $(\min(a_n, b_n))_n$ convergent respectivement vers $\max(\lim_{n\infty} a_n, \lim_{n\infty} b_n)$ et $\min(\lim_{n\infty} a_n, \lim_{n\infty} b_n)$.

2. Soient deux couples de réels (x_1, x_2) et (x'_1, x'_2).

- **(a)** Montrer que $\max(x'_1, x'_2) \leqslant \max(x_1, x_2) + \max(|x'_1 - x_1|, |x'_2 - x_2|)$. En déduire que

$$\left|\max(x'_1, x'_2) - \max(x_1, x_2)\right| \leqslant \max(\left|x'_1 - x_1\right|, \left|x'_2 - x_2\right|).$$

- **(b)** En déduire que

$$\left|\min(x'_1, x'_2) - \min(x_1, x_2)\right| \leqslant \max(\left|x'_1 - x_1\right|, \left|x'_2 - x_2\right|).$$

- **(c)** Soit un réel ε strictement positif. Déduire de ce qui précède un réel η strictement positif tel que si x'_1 et x'_2 sont respectivement égaux à x_1 et x_2 à la précision η, alors $\max(x'_1, x'_2)$ et $\min(x'_1, x'_2)$ sont respectivement égaux à $\max(x_1, x_2)$ et $\min(x_1, x_2)$ à la précision ε.

3. Soit un entier naturel n non nul ; puis deux listes de n réels $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$.

(a) Montrer les deux inégalités suivantes :

$$\left|\max(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) - \max(x_1, x_2, \dots, x_n)\right| \leqslant \max(\left|x'_1 - x_1\right|, \left|x'_2 - x_2\right|, \dots, \left|x'_n - x_n\right|)$$
$$\left|\min(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) - \min(x_1, x_2, \dots, x_n)\right| \leqslant \max(\left|x'_1 - x_1\right|, \left|x'_2 - x_2\right|, \dots, \left|x'_n - x_n\right|)$$

(b) En déduire une extension du résultat de 2c.

***

walter.ngambou@ac-versailles.fr