Thèmes

1. Limites et continuité (d'une fonction numérique de la variable réelle).

(a) *Définitions et propriétés* : **i.** Limite en un point de la droite réelle achevée, appartenant à l'intervalle de définition ou extrémité de cet intervalle ; unicité de LA limite. **ii.** Limite à gauche, limite à droite et limite épointée en un point appartenant à l'intervalle lorsque cela fait sens. **iii. Caractérisation séquentielle de la limite.** **iv.** Calculs de limites par des opérations et inégalités.

(b) *Calculs de limites par des opérations et inégalités* : **i.** Opérations sur les limites finies ou infinies : combinaisons linéaires, produit, quotient et composition des limites. **ii.** Passage à la limite dans les inégalités *larges.* **iii.** Théorème d'encadrement (pour la convergence), théorèmes de minoration et de majoration (resp. pour la divergence vers $+\infty$ et $-\infty$). **iv. Théorème de la limite monotone** (pour les fonctions réelles).

(c) *Continuité (locale) en un point* : **i.** Cas particulier du calcul des limites. **ii.** Opérations sur les fonctions continues en un point.

(d) *Continuité (globale) sur un intervalle* : **i.** Ensemble des fonctions continues sur un intervalle. **ii.** Recherche d'antécédent : **théorème des valeurs intermédiaires**, image d'un intervalle par une fonction continue, caractérisation des fonctions continues parmi les fonctions monotones sur un intervalle, caractérisation des fonctions injectives parmi les fonctions continues sur un intervalle, **théorème de la bijection** (*trois démonstrations non exigibles de tous*).

(e) *Continuité (globale) sur un segment* : **i.** Encadrement uniforme : propriété séquentielle des segments de la droite réelle, **théorème des bornes atteintes.** **ii.** Continuité uniforme : **théorème de Heine** (*admis*).

(f) *Cas des fonctions à valeurs dans le plan complexe* : Convergence et continuité exprimées à la fois par la partie réelle et la partie imaginaire d'une part, et par le module d'autre part.

2. Révisions : Fonctions réelles de référence (convexité exclue) :

(1) *Fonctions réelles d'une variable réelle (fonctions affines, inverse, homographiques, carré, cube ; fonctions puissances de degrés entiers et réciproques ; fonctions polynomiales et fonctions rationnelles ; fonctions exponentielles et réciproques ; fonctions puissances de degrés réels et réciproques ; fonctions circulaires et réciproques ; fonctions circulaires hyperboliques)* : **i.** Continuité. **ii.** Comportements aux bornes : limites, croissance comparée. **iii.** Dérivées et primitives. **iv.** Tableaux de variations. **v.** Représentations graphiques.

walter.ngambou@ac-versailles.fr

Exemples de questions de cours

1. Caractérisation séquentielle de la convergence d'une fonction *complexe* de la variable réelle en un point de la droite réelle.

2. Étant donnée une fonction réelle f définie et monotone croissante sur un intervalle ouvert $]a,b[$, où $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a<b$, montrer que f admet une limite en a et en b. Caractériser ces limites.

3. Étant donnés $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in]0, 10^{-2025}[$, choisir un réel strictement positif η tel que le choix de tout x égal à x_0 à η près suffit pour satisfaire à la contrainte « x^2 égal à x_0^2 à ε près » ($x \in [x_0-\eta, x_0+\eta]$ implique $x^2 \in [x_0^2-\varepsilon, x_0^2+\varepsilon]$).

4. Étant donnée une fonction réelle f définie et continue sur un segment $[a,b]$, si $f(a) \geqslant 0 \geqslant f(b)$, alors f prend la valeur 0 en un certain point de $[a,b]$.

5. Étant donnée une fonction réelle f définie et continue sur un segment $[a,b]$, on peut trouver $x_{\max} \in [a,b]$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \in f(x_{\max})$.

6. Soient un intervalle I de $\mathbb{R}$ non trivial, puis $f : I \to \mathbb{C}$. Soit $x_* \in \overline{\mathbb{R}}$ qui appartient à I ou qui en est une extrémité. Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On a : $\Big(\mathrm{Re}(f(t)) \underset{t\to x_*}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell)\Big) \wedge \Big(\mathrm{Im}(f(t)) \underset{t\to x_*}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell)\Big) \iff |f(t)-\ell| \underset{t\to x_*}{\longrightarrow} 0.$

 walter.ngambou@ac-versailles.fr