Notes de révision du cours de mathématiques

MPSI1

Walter NGAMBOU, walter.ngambou@ac-versailles.fr

Lycée Pasteur, 2024–2025

Version du 14 janvier 2025

Chapitre 10

Limites et continuité

Remerciements à Nicolas LAILLET pour son aide et pour toutes ses ressources mathématiques, jusqu'à son préambule pour écrire en LaTeX.

10 Limites et continuité d'une fonction numérique de la variable réelle

10 Limites et continuité

1 Limite d'une fonction en un point

1.1 Intuition et « au voisinage »

1. Intuitivement, on dit qu'une variable expliquée réelle y, dépendant d'une variable explicative réelle x, tend vers un point y_* de la droite réelle achevée quand x tend vers un point x_* de la droite réelle achevée pour dire que y devient « arbitrairement proche » de ℓ **dès que** x devient « suffisamment proche » de x_*.

2. Ainsi, la notion de tendance est géométrique et figurative, donc on ne saurait étudier cela sans quelque représentation sensible.

3. Le cas des suites, lesquelles sont des fonctions particulières, modélise une situation où la variable explicative mesure une durée à temps discret. Ce qui est le cas dans toute procédure de calcul où l'on modifie des variables étape après étape. Un premier pas vers la précision de l'intuition est l'extension de l'expression « à partir d'un certain rang » comme ce qui suit.

4. On considère un intervalle I non trivial de la droite réelle, et une fonction f de I dans la droite réelle.

- ▷ Etant donné un second intervalle J qui est inclus dans I, on dit que la fonction f possède une propriété sur J pour dire que la restriction de f à J possède cette propriété.
- ▷ Étant donné un point x_* de la droite réelle achevée qui appartient à I ou qui en est une extrémité, on dit que la fonction f possède une propriété *au voisinage* de x_* pour dire que f possède cette propriété sur un intervalle de la forme :
  - $[H, +\infty[$, où $H \in]0, +\infty[$, si $x_* = +\infty$;
  - $[x_* - \eta, x_* + \eta]$, où $\eta \in]0, +\infty[$, si $x_* \in \mathbb{R}$;
  - $]-\infty, -H]$, où $H \in]0, +\infty[$, si $x_* = -\infty$.

5. En exemples :

- ▷ La fonction $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - 2\dfrac{\sin(x)}{x}$ est positive sur $[2024, +\infty[$; donc au voisinage de $+\infty$, cette fonction est positive.
- ▷ La fonction $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas « majorée au voisinage de 0 ».

  En effet, quel que soit $\eta \in]0, +\infty[$, quel que soit $M \in \mathbb{R}$, le réel $\min\left(\eta, \dfrac{1}{\max(1, M)}\right)$ prouve que M n'est pas un majorant de f sur $]0, \eta]$.

1.2 Définitions et premières propriétés

Définition 1 : *Une limite, tendance vers....*
On considère un intervalle I non trivial de la droite réelle, une fonction f de I dans la droite réelle, un point x_* de la droite réelle achevée qui appartient à I ou qui en est une extrémité, et un point ℓ de la droite réelle achevée.

On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_* (en appartenant à I), et que f tend vers ℓ en x_*, et que f admet pour limite ℓ en x_*, et que ℓ est une limite de f en x_*, pour dire que :

- ▷ ET pour tout réel m, si m est un minorant strict de ℓ alors au voisinage de a le réel m est un minorant de la fonction f ; dit autrement, si ℓ est strictement supérieur à m alors au voisinage de x_* la fonction f est supérieure à m ;
- ▷ ET pour tout réel M, si M est un majorant strict de ℓ alors au voisinage de x_* le réel M est un majorant de la fonction f ; dit autrement, si ℓ est strictement inférieur à M alors au voisinage de x_* la fonction f est inférieure à M.

Remarque. On se place dans le cadre ci-avant. Dans le langage symbolique à destination de l'oeil,

▷ la première proposition s'écrit :

- Cas $x_* = +\infty$: $\forall m \in \mathbb{R}, \quad m < \ell \implies \Big(\exists H \in]0,+\infty[\ / \ \forall x \in [H,+\infty[\cap I, \quad m \leqslant f(x)\Big).$
- Cas $x_* \in \mathbb{R}$: $\forall m \in \mathbb{R}, \quad m < \ell \implies \Big(\exists \eta \in]0,+\infty[\ / \ \forall x \in [x_* - \eta, x_* + \eta] \cap I, \quad m \leqslant f(x)\Big).$
- Cas $x_* = -\infty$: $\forall m \in \mathbb{R}, \quad m < \ell \implies \Big(\exists H \in]0,+\infty[\ / \ \forall x \in]-\infty,-H] \cap I, \quad m \leqslant f(x)\Big).$

▷ la seconde proposition s'écrit :

- Cas $x_* = +\infty$: $\forall M \in \mathbb{R}, \quad \ell < M \implies \Big(\exists H \in]0,+\infty[\ / \ \forall x \in [H,+\infty[\cap I, \quad f(x) \leqslant M\Big).$
- Cas $x_* \in \mathbb{R}$: $\forall M \in \mathbb{R}, \quad \ell < M \implies \Big(\exists \eta \in]0,+\infty[\ / \ \forall x \in [x_* - \eta, x_* + \eta] \cap I, \quad f(x) \leqslant M\Big).$
- Cas $x_* = -\infty$: $\forall M \in \mathbb{R}, \quad \ell < M \implies \Big(\exists H \in]0,+\infty[\ / \ \forall x \in]-\infty,-H] \cap I, \quad f(x) \leqslant M\Big).$

Définition 2 : *Limite épointée, à droite, à gauche, en un point de définition.*
On considère un intervalle I non trivial de la droite réelle, un point x_0 de I, un point ℓ de la droite réelle achevée, et une fonction réelle f définie sur I.

1. On dit que ℓ est une *limite épointée au point* x_0 (en x_0) de la fonction f pour dire que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0 en étant distinct de x_0.
2. Si le point x_0 est distinct de l'extrémité supérieure de l'intervalle I, on dit que ℓ est une *limite à droite au point* x_0 (en x_0) de la fonction f pour dire que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0 en étant strictement supérieur à x_0.
3. Si le point x_0 est distinct de l'extrémité inférieure de l'intervalle I, on dit que ℓ est une *limite à gauche au point* x_0 (en x_0) de la fonction f pour dire que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0 en étant strictement inférieur à x_0.

Notations. On note respectivement :
1. $f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}}{\longrightarrow} \ell.$ **2.** $f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x_0 < x}}{\longrightarrow} \ell \quad ; \quad f(x) \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} \ell.$ **3.** $f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}}{\longrightarrow} \ell \quad ; \quad f(x) \underset{x \to x_0^-}{\longrightarrow} \ell.$

Proposition 1 (Caractérisation séquentielle de la limite).

1.3 Opérations sur les limites et inégalités

1.4 Existence de limites

Proposition 2 (Théorème de la limite monotone).

▷ Soient deux points a et b de la droite réelle achevée $\overline{R}$ tels que $a < b$. Soit une fonction réelle f définie sur l'intervalle ouvert $]a,b[$.

▷ On suppose que f est monotone.

▷ Ainsi, f admet une limite en a et une limite en b. Plus précisément,

- Si f est croissante, alors f tend en a vers $\underline{\inf}(f)$ et f tend en b vers $\overline{\sup}(f)$.

- Si f est décroissante, alors f tend en a vers $\overline{\sup}(f)$ et f tend en b vers $\underline{\inf}(f)$.

  Où $\overline{\sup}(f) = \begin{cases} +\infty & \text{si } f \text{ n'est pas majorée} \\ \sup(f) & \text{si } f \text{ est majorée} \end{cases}$ et $\underline{\inf}(f) = \begin{cases} \inf(f) & \text{si } f \text{ est minorée} \\ -\infty & \text{si } f \text{ n'est pas minorée} \end{cases}$

▶ ***Démonstration.***

1. On commence par supposer que f est croissante. On étudie f au voisinage l'extrémité supérieure b de son intervalle ouvert de définition.

On se donne un réel m, quel qu'il soit.
On suppose que
$$m < \overline{\sup}(f).$$
Ainsi, m n'est pas un majorant de f ; donc on choisit un réel s dans $]a, b[$ tel que
$$m < f(s).$$
Or f est croissante par hypothèse, donc
$$\forall x \in [s, b[, \quad m \leqslant f(x).$$
On a montré que pour tout réel m, si m est un minorant strict de $\overline{\sup}(f)$, alors m est un minorant de f au voisinage de b :
$$\forall m \in \mathbb{R}, \qquad m < \overline{\sup}(f) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\exists s \in]a, b[\ / \ \forall x \in [s, b[, \quad m \leqslant f(x)\Big).$$
Or, par définition de $\overline{\sup}(f)$, pour tout réel M, si M est un majorant strict de $\overline{\sup}(f)$, alors M est un majorant de f au voisinage de b :
$$\forall M \in \mathbb{R}, \qquad \overline{\sup}(f) < M \quad \Longrightarrow \quad \Big(\exists s \in]a, b[\ / \ \forall x \in [s, b[, \quad f(x) \leqslant M\Big).$$
C'est que f tend vers $\overline{\sup}(f)$ en b.

2. On suppose que f est décroissante. alors la fonction $-f :]a, b[\to \mathbb{R}, x \mapsto -f(x)$ est croissante et
$$-(-f) = f \quad ; \quad -\overline{\sup}(-f) = \underline{\inf}(f).$$

3. Soit $g :]-b, -a[\to \mathbb{R}, x \mapsto f(-x)$. On a :
$$\forall x \in]a, b[, \ f(x) = f(-(-x)) = g(-x) \quad ; \quad \overline{\sup}(g) = \overline{\sup}(f) \quad ; \quad \underline{\inf}(f) = \underline{\inf}(f).$$
D'une part, d'après ce qui précède, la fonction monotone g admet une limite en $-a$. D'autre part, la fonction $]a, b[\to]-b, -a[, x \mapsto -x$ tend vers $-a$ en a. Donc par composition des limites,
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{y \to -a} g(y)...$$

QED ◀

2 Continuité en un point

2.1 Définitions

Définition 3 : *Continuité, discontinuité en un point.*
On considère un intervalle I non trivial de la droite réelle, puis un point x_0 de I.

▷ On dit qu'une fonction réelle f définie sur I est continue au point x_0 (en x_0) si la valeur de f en x_0 est la limite de f en x_0 :
$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0).$$

▷ On dit que la f est discontinue au point x_0 sinon.

Remarque. Dans le langage symbolique, la continuité de f en x_0 s'écrit :

$$\forall \varepsilon \in]0, 10^{-2025}], \quad \exists \eta \in]0, +\infty[\ / \quad \forall x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap I, \quad f(x) \in [f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon].$$

Dans cette formulation, la variable η peut-être notée (de manière abusive pour les spécialistes de la logique) η_{ε, x_0} pour rappeler la dépendance à ε et à x_0 du réel η à trouver suffisamment petit pour satisfaire à la contrainte finale.

Exemples 2.1.

- ▷ Toute fonction constante est continue en tout point de son ensemble de départ.
- ▷ La fonction $\mathbb{1}_{\{0\}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est discontinue en 0 et continue en tout autre point.
- ▷ La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point.
- ▷ La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ est discontinue en 0, tandis que sa restriction à $\mathbb{R}_+$ est continue en 0.

Définition 4 : *Continuité à droite, à gauche en un point.*
On considère un intervalle I non trivial de la droite réelle, puis un point x_0 de I.

- ▷ Si le point x_0 est distinct de l'extrémité supérieure de l'intervalle I, on dit qu'une fonction réelle f définie sur I est *continue à droite* au point x_0 (en x_0) pour dire que la valeur de f en x_0 est la limite à droite de f en x_0 :
$$f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x_0 < x}}{\longrightarrow} f(x_0).$$
- ▷ Si le point x_0 est distinct de l'extrémité inférieure de l'intervalle I, on dit que la fonction f est *continue à gauche* au point x_0 (en x_0) pour dire que la valeur de f en x_0 est la limite à gauche de f en x_0 :
$$f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}}{\longrightarrow} f(x_0).$$

Remarques.

- ▷ La continuité à droite de f en x_0 signifie que la restriction de f à l'intervalle $[x_0, +\infty[\cap I$ est continue au point x_0.
- ▷ La continuité à gauche de f en x_0 signifie que la restriction de f à l'intervalle $[-\infty, x_0] \cap I$ est continue au point x_0.

2.2 Prolongement par continuité en un point

2.3 Opérations sur les fonctions continues en un point

3 Continuité sur un intervalle

Définition 5 : *Continuité sur un intervalle.*
On considère un intervalle I non trivial de la droite réelle, puis un point x_0 de I.
On dit qu'une fonction réelle définie sur I est continue pour dire qu'elle est continue en tout point x_0 de I :

$$\forall x_0 \in I, \quad \forall \varepsilon \in]0, 10^{-2025}], \quad \exists \eta_{\varepsilon, x_0} \in]0, +\infty[\ / \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| \leqslant \eta_{\varepsilon, x_0} \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

3.1 Ensemble des fonctions continues sur un intervalle

3.2 Recherche d'antécédents

3.2.1 Existence

Proposition 3 (Lemme d'annulation).

Soient deux réels a et b tels que $a < b$. Soit une fonction f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que f est continue ET $f(a) \geqslant 0 \geqslant f(b)$.

Ainsi, on peut trouver c entre a et b tel que

$$f(c) = 0.$$

Remarque. On admet cette proposition et on se place dans le cadre ci-haut.

Alors on peut calculer approximativement un point d'annulation de f à la précision voulue en balayant le segment à pas constant suffisamment petit.

Si on progresse dans l'ordre ascendant, on s'arrête au premier point en lequel f prend une valeur négative.

Ainsi, par application du lemme, soit ce premier point est a et f s'annule en a, soit ce premier point est strictement supérieur à a et f s'annule entre lui-même inclus et le point qui le précède immédiatement, exclu.

► ***Démonstration.*** (Heuristique)

Voie 1 : constructive.

On exploite l'idée de la remarque ci-avant en opérant une recherche dichotomique (balayage du segment à pas moitié en trois points : l'extrémité inférieure, le point milieu et l'extrémité supérieure) : à chaque étape on divise l'intervalle courant de recherche en deux intervalles égaux en longueur puis on choisit un de ces deux comme nouvel intervalle de recherche [...] On obtient ainsi deux suites adjacentes dont la limite est bien définie et est un point d'annulation de f.

Voie 2 : formelle.

On exploite l'idée de la remarque ci-avant en opérant un balayage « à pas infiniment » : ce qui invite à considérer le « premier point » du segment en lequel f prend une valeur négative [...] Ainsi l'infimum de l'ensemble des points en lesquels f prend des valeurs négatives est bien défini et est un point d'annulation de f.

QED ◄

Proposition 4 (Théorème des valeurs intermédiaires).

Soit un intervalle I non trivial de $\mathbb{R}$. Soit une fonction f de I dans $\mathbb{R}$. Soient deux réels a et b dans I. Soit un réel λ.

On suppose que f est continue ET $\Big(f(a) \geqslant \lambda \geqslant f(b)\Big) \vee \Big(f(b) \geqslant \lambda \geqslant f(a)\Big)$.

Ainsi, on peut trouver c dans I tel que

$$f(c) = \lambda.$$

► ***Démonstration.*** Quitte à échanger a et b puis renommer, on suppose $a \leqslant b$. On applique alors le lemme à la restriction à $[a, b]$ de la fonction $f - \lambda$ ou de la fonction $\lambda - f$, opposées l'une de l'autre [...]
On obtient un antécédent de λ entre a et b ; lequel appartient à I car I est un intervalle possédant à la fois a et b. ***QED*** ◄

Proposition 5 (Image d'un intervalle).

Soient un intervalle I non trivial de $\mathbb{R}$, et une fonction f de I dans $\mathbb{R}$.

On suppose que f est continue.

Ainsi, $f(I)$ est un intervalle de la droite réelle.

Commentaire : La propriété des valeurs intermédiaires est-elle suffisante pour la continuité de f ?

Proposition 6 (Monotonie et continuité).

Soient un intervalle I non trivial de $\mathbb{R}$, et une fonction f de I dans $\mathbb{R}$.

On suppose que f est monotone.

Ainsi, il est équivalent que f soit continue et que $f(I)$ soit un intervalle.

► ***Démonstration.***
On suppose que f n'est pas continue. On vise à montrer que $f(I)$ n'est pas un intervalle de la droite réelle ; ce qui revient à dire, d'après la caractérisation des intervalles de la droite réelle, qu'on peut trouver deux valeurs de f et un nombre entre ces deux valeurs qui ne soit pas atteint par f.

Ainsi, soit x_0 de I un point de discontinuité de f. (*Se représenter la situation de manière sensible !*)

Trois cas se présentent.

`Cas 1 :` On suppose que x_0 est l'extrémité inférieure de I.
D'une part f est discontinue en x_0 ; donc l'image de ce point par f n'est pas la limite à droite de f en ce même point.
D'autre part f est monotone ; donc le théorème de la limite monotone assure $f(x_0+)$ existe et que pour tout point x de I, $f(x)$ n'est pas strictement entre $f(x_0)$ et ce réel $f(x_0+)$.
En somme, $f(x_0)$ n'est pas égal à $f(x_0+)$ et la moyenne arithmétique de ces deux réels est un réel compris entre deux valeurs de f mais qui n'est pas une valeur de f.

`Cas 2 :` On suppose que x_0 est l'extrémité supérieure de I.
On traite ce cas comme le précédent avec la limite à gauche au lieu de la limite à droite (il s'agit, au départ, de considérer le parcourt de la droite réelle dans le sens/ l'ordre inverse).

`Cas 3 :` On suppose que x_0 est un point intérieur de I.
Comme f est discontinue en x_0, soit f est discontinue à droite en x_0, soit f est discontinue à gauche en x_0.
C'est que, soit la fonction monotone $f|_{[x_0,+\infty[\cap I}$ est discontinue en x_0 et le traitement du cas 1 permet de conclure, soit la fonction monotone $f|_{]-\infty,x_0]\cap I}$ est discontinue en x_0 et le traitement du cas 2 permet de conclure.

Somme des cas : En les trois cas, on a atteint le but visé (et annoncé) ! ***QED*** ◄

3.2.2 Unicité

Proposition 7 (CS d'injectivité).
Soient un intervalle I non trivial et une fonction réelle f définie sur I.
On suppose que f est strictement monotone.
Ainsi, f est injective.

Commentaire : Pour que f soit injective, il est suffisant que... Est-ce nécessaire ?

▶ ***Démonstration.*** On dit que la fonction f est strictement monotone pour dire que soit la fonction f est strictement croissante, soit la fonction f est strictement décroissante. Ainsi, on peut utiliser les implications réciproques des définitions formelles de la croissance stricte et de la décroissance stricte pour montrer que si f deux points ont une même image par f alors ils sont égaux. ***QED*** ◀

> **Proposition 8** (Injectivité d'une fonction continue).
> Soient un intervalle I non trivial et une fonction réelle f définie sur I.
> On suppose que f est continue.
> Ainsi, si, et seulement si, f est strictement monotone alors f est injective.

Commentaire : La fonction f étant définie sur un intervalle et continue, pour que f soit injective il est nécessaire et suffisant que... i.e. parmi les fonctions définies et continues sur l'intervalle I, les fonctions injectives sont...

▶ ***Démonstration.*** On suppose que f n'est pas strictement monotone. On vise à montrer que f n'est pas injective ; ce en trouvant deux réels a et b tels que

$$f(a) = f(b) \quad \text{et} \quad a \neq b.$$

On dit que f n'est pas strictement monotone pour dire que f n'est ni strictement croissante ni strictement décroissante. Soit alors deux couples (a_0, b_0) et (a_1, b_1) de points de I tels que

$$\begin{aligned} a_0 < b_0 \quad &\text{et} \quad f(a_0) \geqslant f(b_0) \\ a_1 < b_1 \quad &\text{et} \quad f(a_1) \leqslant f(b_1) \end{aligned}$$

Pour tout t dans $[0, 1]$, on pose

$$a_t \overset{\text{def.}}{=} a_0 + t(-a_0 + a_1) = (1-t)a_0 + ta_1 \qquad \text{et} \qquad b_t \overset{\text{def.}}{=} b_0 + t(-b_0 + b_1) = (1-t)b_0 + tb_1.$$

D'abord, la fonction $[0, 1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto -f(a_t) + f(b_t)$ est continue, prend une valeur positive en 0 et une valeur négative en 1 ; donc elle s'annule d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Ensuite, la fonction $[0, 1] \to \mathbb{R}, t \mapsto -a_t + b_t$ est affine, strictement positive en 0 et en 1, donc elle est strictement positive (par le calcul : $-a_t + b_t = (1-t)(-a_0 + b_0) + t(-a_1 + b_1) \geqslant \min(-a_0 + b_0, -a_1 + b_1)$).

QED ◀

3.2.3 Existence et unicité

> **Proposition 9 (Théorème de la bijection)**.
> Soient un intervalle I non trivial et une fonction réelle f définie sur I.
> On suppose que f est strictement monotone et continue.
> Ainsi, f induit une bijection de I sur $f(I)$ dont la réciproque est strictement monotone de même sens et continue.

▶ ***Démonstration.***

Comme f est strictement monotone, f est injective ; donc la fonction

$$\begin{aligned} \tilde{f} :\ I &\longrightarrow f(I) \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

est une bijection de I sur $f(I)$.

En utilisant les implications réciproques des définitions formelles de la croissance stricte et de la décroissance stricte, on trouve que $\tilde{f}^{-1}$ est strictement monotone de même sens que $\tilde{f}$.

Comme f est continue, $f(I)$ est un intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Ainsi, $\tilde{f}^{-1}$ est une fonction réelle définie sur un intervalle, est monotone et admet pour ensemble image un intervalle ; donc $\tilde{f}^{-1}$ est continue d'après la proposition 6 "monotonie et continuité".

QED ◀

Méthode 1. Montrons que la fonction racine carrée est bien définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, strictement croissante et continue.

La fonction carré est à la fois telle que

- ▷ elle est strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ à cause des propriétés de l'ordre usuel des réels.
- ▷ elle vaut 0 en 0 et tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
- ▷ elle est continue.

Donc, d'après le théorème de la bijection, la fonction carré induit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ dont la réciproque est strictement croissante et continue.

4 Continuité sur un segment

4.1 Encadrement uniforme

Proposition 10 (Propriété liminaire des segments).
Soit un segment de la droite réelle. Pour toute suite dans ce segment,

- ▷ Si la suite est convergente alors sa limite est un point de ce segment.
- ▷ La suite admet une sous-suite qui converge vers un point de ce segment.

Commentaire : Qu'en est-il pour une partie de la droite réelle autre qu'un segment ?

▶ ***Démonstration.*** Passage à la limite dans les inégalités larges et théorème d'extraction de Bolzano-Weierstrass. ***QED*** ◀

Proposition 11 (Théorème des bornes atteintes).
Soient deux réels a et b tels que $a < b$, puis une fonction réelle définie sur le segment $[a, b]$.
On suppose que f est continue.
Ainsi,

1. ET f est bornée supérieurement et atteint sa borne supérieure ;
2. ET f est bornée inférieurement et atteint sa borne inférieure.

Remarque. La conclusion signifie qu'on peut trouver $x_{\min}$ et $x_{\max}$ dans le segment $[a, b]$ tels que :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x_{\min}) \leqslant f(x) \leqslant f(x_{\max}).$$

▶ ***Démonstration.***

1. On montre le premier point.
   a) Pour montrer que f est bornée supérieurement (majorée), on peut raisonner par l'absurde.
   On suppose ainsi que f n'est pas bornée supérieurement, ce qui permet de choisir une suite dans le segment $[a, b]$ dont la suite des images par f tend vers $+\infty$.
   Si la suite initiale est constante, stationnaire ou convergente alors on conclut que f est discontinue en sa limite ; ce qui est absurde.
   Sinon on applique le théorème e Bolzano-Weirstrass pour conclure de la même manière.

b) Pour montrer que f atteint sa borne supérieure, on peut procéd comme précédemment pour choisir une suite dans le segment $[a, b]$ telle que et la suite converge vers un point de ce segment, et la suite des images par f converge vers la borne supérieure $\sup(f)$...

On peut aussi, par l'absurde, supposer que f n'atteint pas M. Alors la fonction $[a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/(\sup(f) - f(x))$ est définie et continue sur un segment, mais elle et non bornée supérieurement...

2. On applique ce qui précède à la fonction $[a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto -f(x)$. Soit alors x_* dans $[a, b]$ tel que pour tout point x de $[a, b]$, $-f(x) \leqslant -f(x_*)$...

QED ◀

Proposition 12 (Image d'un segment).
Étant donnée une fonction réelle f définie sur un segment, si f est continue alors l'ensemble image de f est un segment.

▶ ***Démonstration.*** Théorème des valeurs intermédiaires et théorème des bornes atteintes. ***QED*** ◀

4.2 Continuité uniforme

Définition 6 : *Continuité uniforme sur un intervalle.*
On considère un intervalle I non trivial de la droite réelle.
On dit qu'une fonction réelle définie sur I est uniformément continue pour dire que :

$$\forall \varepsilon \in]0, 10^{-2025}], \quad \exists \eta_\varepsilon \in]0, +\infty[\ / \quad \forall x_0 \in I, \quad \forall x \in I, \qquad |x - x_0| \leqslant \eta_\varepsilon \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Exemples 4.1.

- ▷ Pour tous réels a et b, la fonction affine $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$ est uniformément continue.
- ▷ Les fonctions sinus et cosinus sont uniformément continues.
- ▷ La fonction racine carrée est uniformément continue.
- ▷ Toute fonction polynomiale définie sur un segment est uniformément continue (voir EXOS : 3).
- ▷ La restriction à $]0, 1]$ de la fonction inverse n'est pas uniformément continue.

Proposition 13 (Continuité uniforme sur un segment, **Théorème de Heine**).
Étant donnée une fonction réelle f définie sur un segment, si f est continue alors f est uniformément continue.

▶ ***Démonstration.*** Admise. ***QED*** ◀

5 Fonctions complexes

Définition 7 : *Convergence d'une fonction complexe.*
On considère : un intervalle I non trivial de la droite réelle $\mathbb{R}$, un point t_* de la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$ qui appartient à I ou qui en est une extrémité, une fonction f définie de l'intervalle I dans le plan complexe $\mathbb{C}$, et un point ℓ du plan complexe $\mathbb{C}$.
On dit à la fois que la fonction complexe f converge au point t_* vers le complexe ℓ, et que le complexe ℓ est une limite de la fonction complexe f au point t_*, pour dire que les deux fonctions réelles $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ convergent au point t_* vers les réels $\mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(\ell)$ respectivement.

Notation. On écrit : $f(t) \underset{t \to t_*}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque. C'est dire que la fonction complexe $\mathrm{Re}(f)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f)$ converge au point t_* vers le complexe $\mathrm{Re}(\ell)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\ell)$.

Définition 8 : *Continuité en un point.*
On dit qu'une fonction complexe définie sur un intervalle de la droite réelle est continue en un point si, et seulement si, ses deux fonctions partie réelle et partie imaginaire sont continues en ce point.

Remarque. On adapte la définition de la continuité globale.

Proposition 14 (Unicité de la limite complexe).
Si la limite complexe existe, alors elle est unique.

Remarque. Par définition, la limite complexe de f en t_* existe si, et seulement si, les limites réelles en t_* de $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f)$ existent toutes les deux, auquel cas on écrit :

$$\lim_{t\to t_*} f(t) = \lim_{t\to t_*} \mathrm{Re}\left(f(t)\right) + \mathrm{i}\lim_{t\to t_*} \mathrm{Im}\left(f(t)\right) \qquad \text{et} \qquad \lim_{t_*} f = \lim_{t_*} \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\lim_{t_*} \mathrm{Im}(f).$$

Proposition 15 (Inégalités liminaires).
Pour tous réels positifs a et b,

$$\max(a,b) \leqslant \sqrt{a^2+b^2} \leqslant a+b$$

Pour tous couples de réels (x,y) et (x',y'),

$$\max\left(\left|x'-x\right|, \left|y'-y\right|\right) \leqslant \sqrt{\left|x'-x\right|^2+\left|y'-y\right|^2} \leqslant \left|x'-x\right| + \left|y'-y\right|.$$

Commentaire : Si un triangle rectangle admet pour côtés adjacents à l'angle droit a et b, alors chacun de ces deux côtés est inférieur à l'hypoténuse, lequel est inférieur à la somme des deux premiers côtés.

Proposition 16 (Convergence et module).
Soient : un intervalle I non trivial de la droite réelle $\mathbb{R}$, un point t_* de la droite réelle achevée qui appartient à I ou qui en est une extrémité, une fonction f définie de l'intervalle I dans le plan complexe $\mathbb{C}$, et un point ℓ du plan complexe $\mathbb{C}$.
Ainsi, la fonction complexe f converge au point t_* vers le complexe ℓ si, et seulement si, la fonction réelle positive $|f-\ell|$ converge au point t_* vers le réel 0.

Remarque. C'est que : $\left(\mathrm{Re}(f(t)) \underset{t\to t_*}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell)\right) \wedge \left(\mathrm{Im}(f(t)) \underset{t\to t_*}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell)\right) \iff |f(t)-\ell| \underset{t\to t_*}{\longrightarrow} 0.$

Remarque. Restent valables la caractérisation séquentielle de la convergence et les propriétés des opérations sur les fonctions convergentes.
On adapte la définition de la continuité uniforme comme on étend la valeur absolue au module.

6 EXOS

1. *(Le discret et les sommes pondérées)*
Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels $a < b$. Soient $n \in \mathbb{N}$; puis $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in [a, b]^{n+1}$.
Soit $(p_0, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

On suppose que $(p_0, p_1, \dots, p_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$. On suppose que $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Montrer que :

$$\exists c \in [a, b] \ / \quad f(x_0)p_0 + f(x_1)p_1 + \cdots f(x_n)p_n = f(c)(p_0 + p_1 + \cdots + p_n).$$

2. *(Le continu et les sommes pondérées)*
Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels $a < b$. Soit $p : [a, b] \to \mathbb{R}_+$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

On suppose que $p \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \setminus \{0\}$. On suppose que $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Montrer que :

$$\exists c \in [a, b] \ / \quad \int_{[a,b]} f(x)p(x)\mathrm{d}x = f(c) \int_{[a,b]} p(x)\mathrm{d}x.$$

3. *(Continuité et tableau de valeurs : continuité uniforme effective)*
Soit A un réel strictement positif. Soient $N \in \mathbb{N}^*$, puis $(c_0, c_1, \dots, c_k, \dots, c_{N-1}, c_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$. Soit $f : [-A, A] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = c_0 + c_1 x^1 + \cdots + c_k x^k + \cdots + c_{N-1} x^{N-1} + c_N x^N.$$

Soit ε un réel strictement positif.

a) Trouver un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x_0 \in [-A, A], \ \forall x \in [-A, A], \quad |x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Commentaire : Le réel η ne doit dépendre que de A, N, $(c_0, \dots, c_N)$ et ε.

b) Soit $\eta > 0$ un réel satisfaisant à la requête précédente. En déduire un nombre N de points pour qu'un tableau de valeurs de f à $N + 1$ points et à pas constant suffise à évaluer approximativement f en tout point à la précision ε.

***