THÈME

Structures algébriques.

- a) *Loi de composition interne (LCI)* : **i.** Définitions : LCI associative, LCI commutativité, éléments commutants, élément neutre, élément symétrisable, élément simplifiable, LCI distributive par rapport à une autre. **ii.** Composées « multinaires » : **itérés d'un élément**, composée d'une liste, composée commutative d'une famille finie, groupement par paquets. **iii.** LCI par héritage : **partie stable et loi induite**, loi produit. **iv.** Homomorphismes : homomorphisme et isomorphisme entre deux ensembles munis de LCI's, endomorphisme et automorphisme d'un ensemble muni d'une LCI, composée d'homomorphismes, homomorphisme et loi produit.
- b) *Structure de groupe* : **i.** Généralités : loi de groupe, propriétés des translations à gauche et des translations à droite. **ii.** Groupe par héritage : sous-groupe, **caractérisation des sous-groupes**, intersection de sous-groupes, sous-groupe engendré par des éléments, **sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$** , sous-groupes multiplicatifs finis de $\mathbb{C}$ (*démonstration non exigible*), groupe produit (dont groupe « fonctionnel »). **iii.** Homomorphismes de groupes : homomorphisme et isomorphisme entre deux groupes, endomorphisme et automorphisme d'un groupe, composée d'homomorphismes de groupes, homomorphisme de groupes et loi produit, **image réciproque et image directe** par un homomorphisme de groupes, noyau et image d'un homomorphisme de groupes, **ensemble des antécédents par un homomorphisme de groupes**, CNS d'injectivité d'un homomorphisme de groupes, cardinaux du noyau et de l'image d'un homomorphisme partant d'un groupe fini. **iv.** Groupe symétrique d'un ensemble : isomorphisme des groupes symétriques de deux ensembles en bijection, **transpositions et produits de transpositions**, points fixes et support d'une permutation, commutativité de deux permutations à supports disjoints, orbites suivant une permutation, **cycles et produits de cycles à supports disjoints** (*théorème de décomposition en produits de cycles à supports disjoints non démontré*).
- c) *Structure d'anneau* : **i.** Généralités : opposée de tout élément, inverse de tout élément inversible, groupe des inversibles, sous-anneau, anneau produit (dont anneau « fonctionnel »), homomorphismes d'anneaux. **ii.** Calculs dans un anneau quelconque : absorbance et règle des signes, itérés additifs d'un produit, double distributivité générale, formule de Bernoulli, formule du binôme de Newton. **iii.** Anneaux commutatifs : anneau intègre, corps.

EXEMPLES DE QUESTIONS DE COURS

1. Composées d'itérés d'un élément symétrisable a : $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall \ell \in \mathbb{Z}, a^k * a^\ell = a^{k+\ell}$.
2. Caractérisation des sous-groupes d'un groupe.
3. Sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$,
4. Image réciproque par un homomorphisme de groupes.
5. Ensemble des antécédents par un homomorphisme de groupes.
6. Décomposition d'une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ en produit de transpositions.
7. Distributivité générale dans un anneau quelconque.
8. Formule de Bernoulli dans un anneau quelconque.
9. Formule du binôme de Newton dans un anneau quelconque.