MPSI 1

Mathématiques
DS 05 (4H 00)

Samedi 18 janvier – 8h-12h

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants : un problème mêlant analyse et arithmétique, et un problème presque exclusivement consacré aux suites (avec un soupçon d'arithmétique).

Consignes aux aspirants aux grandes écoles :

1. Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
2. **Aucune couleur** n'est autorisée à l'exception du bleu et du noir.
3. Il est demandé de **numéroter** les écrits **page par page** en bas à droite.
4. Il est demandé d'indiquer **les numéros** ou étiquettes des questions dans la marge gauche.
5. Il est demandé de mettre en évidence **les arguments capitaux et les résultats**.
6. **Toute réponse non mise en évidence** sera ignorée.
7. Il est demandé d'indiquer **toute question sautée** par son numéro.
8. Il est permis d'admettre le résultat d'une question en écrivant **"Admis."** sur la copie, puis de s'en servir par la suite.
9. Que le candidat qui trouve ce qui lui semble être une erreur d'énoncé l'indique sur sa copie.
10. Une réponse fausse sans calculs intermédiaires est nulle.
11. Une **chose nommée non définie** par celui qui la nomme annule tout raisonnement se rapportant à cette chose.
12. Les **abréviations** non définies ou grossières sont interdites.

Problème 1. Densité d'une partie de $\mathbb{N}$

Le but de ce problème est d'étudier la notion de densité d'une partie de $\mathbb{N}$. On rappelle que le cardinal d'une partie **finie** E, noté $\operatorname{Card}(E)$, est son nombre d'éléments. On précise que

- $\operatorname{Card}(\emptyset) = 0$.
- Si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $a \leqslant b$, $\operatorname{Card}([\![a, b]\!]) = 1 + b - a$,
- Si $A \subset B$ et B est une partie finie de $\mathbb{N}$, alors A est une partie finie de $\mathbb{N}$ et $\operatorname{Card}(A) \leqslant \operatorname{Card}(B)$,
- Si $A \subset B$ et B est une partie finie de $\mathbb{N}$, alors $\operatorname{Card}(B \setminus A) = \operatorname{Card}(B) - \operatorname{Card}(A)$.

La densité d'une partie $A \subset \mathbb{N}$ est, quand elle existe, la limite

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Card}(A \cap [\![1, n]\!])$$

En d'autres termes, si pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'éléments de A qui sont compris entre 1 inclus et n inclus, $\delta(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n}$.

Partie I. Généralités et quelques exemples

1. Justifier que la densité d'une partie de $\mathbb{N}$, si elle existe, est un réel de l'intervalle $[0, 1]$.

2. Quelle est la densité d'une partie finie de $\mathbb{N}$?

3. Soit A une partie admettant une densité égale à un réel d. Démontrer que $\mathbb{N} \setminus A$ admet une densité, que l'on précisera.

4. Soit $D = \{10^k \;:\; k \in \mathbb{N}\}$. Déterminer la densité de D. A-t-on, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, « $\delta(A) = 0$ » implique « A est fini » ?

Partie II. Densité de certains ensembles arithmétiques

5. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer la densité de l'ensemble $p\mathbb{N} = \{kp \;:\; k \in \mathbb{N}\}$.

Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux. On pose $E_{a,b} = \{au + bv \;:\; (u, v) \in \mathbb{N}^2\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

6. Démontrer qu'il existe un couple $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ar + bs = n$.

7. Soit $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ar + bs = n$. Déterminer, en fonction de (r, s), l'ensemble des couples (u, v) dans $\mathbb{Z}^2$ tels que $au + bv = n$.

8. En déduire que si $n \geqslant ab$, alors il existe $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $ax + by = n$.

9. En déduire $\delta(E_{a,b})$.

Partie III. Théorème de raréfaction des nombres premiers

On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

- $\pi(n)$ le nombre de premiers inférieurs ou égaux à n,
- α_n le produit de tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à n : $\alpha_n = \prod\limits_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} p$.

10. Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que $\dbinom{2m+1}{m} \leqslant 4^m$.

11. Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{P}$ vérifiant $m+1 < p \leqslant 2m+1$, p divise $\binom{2m+1}{m}$.

12. En déduire que $\displaystyle\prod_{\substack{m+1<p\leqslant 2m+1 \\ p \text{ premier}}} p \leqslant 4^m$.

13. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \leqslant 4^n$.

14. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $2 \leqslant m \leqslant n$. Montrer que $m^{\pi(n)-\pi(m)} \leqslant 4^n$.

15. En déduire que pour tout $m \in [\![2,+\infty[\![$, pour tout $n \in [\![m,+\infty[\![$,

$$\pi(n) \leqslant \frac{n \ln 4}{\ln m} + \pi(m).$$

16. Déterminer alors la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\dfrac{\pi(n)}{n}$ et en déduire $\delta(\mathbb{P})$.

Hadamard et De la Vallée Poussin ont en fait démontré le **théorème des nombres premiers** :

$$\pi(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}$$

On admet ce théorème (démontrable en deuxième année avec peine !)

17. En quoi cela permet-il de retrouver la valeur de $\delta(\mathbb{P})$?

18. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le n-ième nombre premier. Démontrer que $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$.
On pourra déterminer une expression évidente et un équivalent de $\pi(p_n)$, et on pourra démontrer que $\ln(p_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Problème 2. Autour des contractions

Le but de ce problème est d'étudier quelques exemples de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

On considère $k \in]0,1[$.
On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est k-contractante, ou que c'est une k-contraction pour dire que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

De manière semblable, on dit qu'une fonction $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une k-contraction, ou que c'est une k-contraction pour dire que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2,\ |g(x) - g(y)| \leqslant k|x-y|.$$

Partie I. Premiers résultats

Soit f une k-contraction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifie $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$, alors $f(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$.

2. Démontrer que f admet au plus un point fixe.

3. On suppose dans cette question et la suivante que f admet un point fixe ℓ. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant k^n |u_0 - \ell|$.

4. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie II. Le théorème du point fixe de Banach-Picard

Le but de cette section est de démontrer le résultat suivant :

Proposition 1. *Soient $k \in]0,1[$ et f une k-contraction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Ainsi, f admet un unique point fixe.*

Pour démontrer ce résultat, on prend f une contraction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, puis on choisit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in \mathbb{C}$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

5. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n |u_1 - u_0|$.

6. En déduire, à l'aide d'un télescopage, que pour tous m, n dans $\mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$,

$$|u_n - u_m| \leqslant k^m \frac{1-k^{n-m}}{1-k} |u_1 - u_0|,$$

7. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

8. Conclure qu'il existe une extraction φ et un complexe ℓ tels que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

9. Démontrer enfin que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, puis que f admet un point fixe. *On pourra choisir une extraction φ comme ci-avant puis remarquer que $u_n - \ell = u_n - u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)} - \ell$.*

Partie III. Le cas des semi-contractions

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

Proposition 2. *Soit f une semi-contraction, i.e. une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

10. Trouver trois exemples de fonctions affines f tels que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge/tende vers $+\infty$/n'ait pas de limite. Ainsi s'intéresse-t-on à la limite de $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et pas à celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

III-A. Le lemme de Fekete

Il s'agit ici d'établir un lemme préliminaire. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs qui est sous-additive, c'est-à-dire que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ a_{m+n} \leqslant a_m + a_n.$$

Notre but est de démontrer que $\frac{a_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \inf(\mathcal{A})$, où $\mathcal{A} = \left\{\frac{a_n}{n}\ :\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

11. Soit $(n, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soient q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par N. Démontrer que

$$\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{a_N}{N} + \frac{M_N}{n},$$

où $M_N = \max\{a_0, a_1, \dots, a_{N-1}\}$.

12. Démontrer alors que $\frac{a_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \inf(\mathcal{A})$ (en justifiant que $\inf(\mathcal{A})$ existe bien).
On aura intérêt à utiliser les ε, et notamment une caractérisation bien choisie de la borne inférieure.

III-B. Deux autres résultats préliminaires

13. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers $+\infty$. Démontrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ tel que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ v_n \geqslant v_k.$$

14. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite sous-additive, telle que $\dfrac{a_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A > 0$. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout N dans $\mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ tel que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_n \geqslant a_{n-k} + (A-\varepsilon)k.$$

On pourra commencer en déterminant la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $a_n - n(A-\varepsilon)$.

III-C. Démonstration de la proposition 2

On note, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $d_n = |u_n - u_0| = |u_n|$ (on rappelle que l'on a supposé $u_0 = 0$).

15. Démontrer que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite sous-additive, puis que $\left(\dfrac{d_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note A sa limite.

16. Justifier que si $A = 0$, la proposition est démontrée.

On suppose désormais que $A > 0$.

17. Démontrer, en utilisant la question 14., qu'il existe une suite $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 et une suite d'entiers $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$, tendant vers $+\infty$, telles que pour tout i,

$$\forall \ell \in [\![0, n_i]\!],\ d_{n_i} \geqslant d_{n_i-\ell} + (A-\varepsilon_i)\ell,$$

ET telle que la suite $(u_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ soit à valeurs non nulles et de signe constant.

On considère deux telles suites $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$. On suppose que pour tout i dans $\mathbb{N}$, $u_{n_i} > 0$. On va démontrer, à l'aide de cette sous-suite, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant.

18. Soit $i \in \mathbb{N}$. Démontrer que, pour tout entier naturel $\ell \leqslant n_i$,

$$-u_\ell \leqslant |u_\ell - u_{n_i}| - |u_{n_i}| \leqslant d_{n_i-\ell} - d_{n_i} \leqslant -(A-\varepsilon_i)\,\ell.$$

19. Conclure alors que $u_\ell \geqslant 0$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ puis que $\dfrac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$.

20. Comment adapter le cas où $(u_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ est est à valeurs strictement négatives ?

***