MPSI 1

Mathématiques DS 05 (4H 00)

Samedi 18 janvier – 8h-12h

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants : un problème mêlant analyse et arithmétique, et un problème presque exclusivement consacré aux suites (avec un soupçon d'arithmétique).

Consignes aux aspirants aux grandes écoles :

1. Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
2. **Aucune couleur** n'est autorisée à l'exception du bleu et du noir.
3. Il est demandé de **numéroter** les écrits **page par page** en bas à droite.
4. Il est demandé d'indiquer **les numéros** ou étiquettes des questions dans la marge gauche.
5. Il est demandé de mettre en évidence **les arguments capitaux et les résultats**.
6. **Toute réponse non mise en évidence** sera ignorée.
7. Il est demandé d'indiquer **toute question sautée** par son numéro.
8. Il est permis d'admettre le résultat d'une question en écrivant "**Admis.**" sur la copie, puis de s'en servir par la suite.
9. Que le candidat qui trouve ce qui lui semble être une erreur d'énoncé l'indique sur sa copie.
10. Une réponse fautive sans calculs intermédiaires est nulle.
11. Une **chose nommée non définie** par celui qui la nomme annule tout raisonnement se rapportant à cette chose.
12. Les **abréviations** non définies ou grossières sont interdites.

Problème 1. Densité d'une partie de $\mathbb{N}$

Le but de ce problème est d'étudier la notion de densité d'une partie de $\mathbb{N}$. On rappelle que le cardinal d'une partie **finie** E , noté $\text{Card}(E)$, est son nombre d'éléments. On précise que

- $\text{Card}(\emptyset) = 0$.
- Si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $a \leq b$, $\text{Card}(\llbracket a, b \rrbracket) = 1 + b - a$,
- Si $A \subset B$ et B est une partie finie de $\mathbb{N}$, alors A est une partie finie de $\mathbb{N}$ et $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$,
- Si $A \subset B$ et B est une partie finie de $\mathbb{N}$, alors $\text{Card}(B \setminus A) = \text{Card}(B) - \text{Card}(A)$.

La densité d'une partie $A \subset \mathbb{N}$ est, quand elle existe, la limite

$$\delta(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Card}(A \cap \llbracket 1, n \rrbracket)$$

En d'autres termes, si pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'éléments de A qui sont compris entre 1 inclus et n inclus, $\delta(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n}$.

Partie I. Généralités et quelques exemples

1. Justifier que la densité d'une partie de $\mathbb{N}$, si elle existe, est un réel de l'intervalle $[0, 1]$.

Soit A une partie de $\mathbb{N}$, soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $A \cap \llbracket 1, n \rrbracket \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, donc

$$\text{Card}(A \cap \llbracket 1, n \rrbracket) \leq \text{Card}(\llbracket 1, n \rrbracket) = n,$$

donc

$$\frac{\text{Card}(A \cap \llbracket 1, n \rrbracket)}{n} \leq 1,$$

soit, en passant à la limite (qui existe car on a supposé A ayant une densité), $\delta(A) \leq 1$.

2. Quelle est la densité d'une partie finie de $\mathbb{N}$?

Soit A une partie finie de $\mathbb{N}$, a son cardinal. Alors pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$0 \leq \frac{\text{Card}(A \cap \llbracket 1, n \rrbracket)}{n} \leq \frac{a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc A admet une densité et $\delta(A) = 0$.

3. Soit A une partie admettant une densité égale à un réel d . Démontrer que $\mathbb{N} \setminus A$ admet une densité, que l'on précisera.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $(\mathbb{N} \setminus A) \cap \llbracket 1, n \rrbracket = \llbracket 1, n \rrbracket \setminus (A \cap \llbracket 1, n \rrbracket)$. Donc

$$\frac{\text{Card}((\mathbb{N} \setminus A) \cap \llbracket 1, n \rrbracket)}{n} = 1 - \frac{\text{Card}(A \cap \llbracket 1, n \rrbracket)}{n}.$$

Donc

$$\frac{\text{Card}((\mathbb{N} \setminus A) \cap \llbracket 1, n \rrbracket)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - d,$$

c'est-à-dire que $\mathbb{N} \setminus A$ admet une densité de $1 - d$.

4. Soit $D = \{10^k : k \in \mathbb{N}\}$. Déterminer la densité de D . A-t-on, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, « $\delta(A) = 0$ » implique « A est fini » ?

On remarque que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $10^k \leq n \Leftrightarrow k \leq \log_{10}(n)$. Ainsi,

$$\text{Card}(D \cap \llbracket 1, n \rrbracket) = \lfloor \log_{10}(n) \rfloor.$$

Donc

$$\frac{\text{Card}(D \cap \llbracket 1, n \rrbracket)}{n} = \frac{\lfloor \log_{10}(n) \rfloor}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

par croissances comparées. Donc $\delta(D) = 0$, alors que, pourtant, D est infini !

Partie II. Densité de certains ensembles arithmétiques

5. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer la densité de l'ensemble $p\mathbb{N} = \{kp : k \in \mathbb{N}\}$.

On remarque simplement que l'ensemble des multiples de p dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ est $p, 2p, \dots, jp$, où j est tel que $jp \leq n < (j+1)p$. Ainsi, $j = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$. On en déduit que

$$\frac{\text{Card}(p\mathbb{N} \cap \llbracket 1, n \rrbracket)}{n} = \frac{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}{n}.$$

Or,

$$\frac{n}{p} - 1 \leq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \leq \frac{n}{p},$$

donc

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{n} \leq \frac{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}{n} \leq \frac{1}{p},$$

donc, par théorème d'encadrement, $\frac{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p}$.

Ceci permet de dire que $\delta(p\mathbb{N}) = \frac{1}{p}$.

Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux. On pose $E_{a,b} = \{au + bv : (u, v) \in \mathbb{N}^2\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

6. Démontrer qu'il existe un couple $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ar + bs = n$.

Comme a et b sont premiers entre eux, par le théorème de Bézout, on dispose de $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au_0 + bv_0 = 1$. En posant $r = u_0n$ et $s = v_0n$, on a le résultat.

7. Soit $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ar + bs = n$. Déterminer, en fonction de (r, s) , l'ensemble des couples (u, v) dans $\mathbb{Z}^2$ tels que $au + bv = n$.
-

On a l'homomorphisme de groupes : $(\mathbb{Z}^2, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$, $(u, v) \mapsto au + bv$.
Cherchons son noyau. Soit un couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$.

Analyse. On suppose : $au + bv = 0$. Alors $au = -bv$.

On suppose $b \neq 0$. Ainsi, au est divisible par b et a est premier avec b ; donc d'après le lemme de Gauss, on peut écrire : $u = kb$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Mais alors $akb = -bv$, donc $-ak = v$, car $b \neq 0$. Ainsi, $(u, v) = (kb, -ka)$.

On suppose $b = 0$. Alors $a = 1$ puis $u = 0$. On trouve encore $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(u, v) = (kb, -ka)$.

Synthèse. Réciproquement, s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(u, v) = (kb, -ka)$, alors $au + bv = 0$.

En somme, l'ensemble des solutions est $\{(r + kb, s - ak) : k \in \mathbb{Z}\}$.

8. En déduire que si $n \geq ab$, alors il existe $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $ax + by = n$.
-

On suppose $n \geq ab$.

On suppose $a = 0$. Alors $b = 1$; puis $n = a1 + bn$.

Le cas $b = 0$ est symétrique.

On suppose a et b non nuls.

Si la solution particulière (r, s) trouvée est déjà dans $\mathbb{N}^2$, c'est bon.

Sinon, la question est de savoir s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $r + kb \geq 0$ et $s - ak \geq 0$, i.e. tel que

$-\frac{r}{b} \leq k \leq \frac{s}{a}$ car a et b sont dans $\mathbb{R}_+^*$. Or,

$$\frac{s}{a} - \left(-\frac{r}{b}\right) = \frac{sb + ar}{ab} = \frac{n}{ab} \geq 1,$$

Donc l'intervalle $\left[-\frac{r}{b}, \frac{s}{a}\right]$ possède l'entier $k = \left\lfloor \frac{s}{a} \right\rfloor$.

Posons alors $x = r + bk$ et $y = s - ak$. On a bien $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ et $ax + by = n$, d'où le résultat visé!

9. En déduire $\delta(E_{a,b})$.
-

On en déduit que $\mathbb{N} \setminus E_{a,b}$ est fini, donc $\delta(\mathbb{N} \setminus E_{a,b}) = 0$ par la question 2.. Ainsi,

$$\delta(E_{a,b}) = 1 - \delta(\mathbb{N} \setminus E_{a,b}) = 1,$$

par la question 3..

Partie III. Théorème de raréfaction des nombres premiers

On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

- $\pi(n)$ le nombre de premiers inférieurs ou égaux à n ,
- α_n le produit de tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à n : $\alpha_n = \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ premier}}} p$.

10. Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$.

Démontrons le résultat par récurrence sur m .

L'**initialisation** est évidente : $\binom{2 \times 0 + 1}{0} = 1 \leq 4^0$.

Pour l'**hérédité**, soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$. Alors

$$\begin{aligned} \binom{2(m+1)+1}{m+1} &= \binom{2m+3}{m+1} \\ &= \frac{2m+3}{m+1} \binom{2m+2}{m} \\ &= \frac{2m+3}{m+1} \frac{(2m+2)!}{m!(m+2)!} \\ &= \frac{2m+3}{m+1} \times \frac{2m+2}{m+2} \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} \\ &= \frac{2m+3}{m+2} \times 2 \times \binom{2m+1}{m} \\ &\leq \frac{2m+4}{m+2} \times 2 \binom{2m+1}{m} \end{aligned}$$

$$\leq 4 \times 4^m \text{ par hypothèse de récurrence,}$$

d'où l'hérédité, et le résultat.

11. Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{P}$ vérifiant $m+1 < p \leq 2m+1$, p divise $\binom{2m+1}{m}$.

On sait que

$$m!(m+1)! \binom{2m+1}{m} = (2m+1)! .$$

Soit p premier tel que $m+1 < p \leq 2m+1$.

Comme $(2m+1)!$ est divisible par p , d'après le lemme d'Euclide, soit un entier de $\llbracket 1, m+1 \rrbracket$ est divisible par p , soit $\binom{2m+1}{m}$ est divisible par p .

Or $p > m+1$, donc aucun entier de $\llbracket 1, m+1 \rrbracket$ n'est divisible par p .

D'où le résultat.

12. En déduire que $\prod_{\substack{m+1 < p \leq 2m+1 \\ p \text{ premier}}} p \leq 4^m$.

D'après le théorème de de décomposition facteurs premiers, si des nombres premiers distincts divisent un même entier a alors leur produit divise a . Par conséquent, $\prod_{\substack{m+1 < p \leq 2m+1 \\ p \text{ premier}}} p$ divise

$\binom{2m+1}{m} \neq 0$. Or l'ordre de divisibilité dans $\mathbb{N}^*$ est compatible avec l'ordre naturel, d'où

$$\prod_{\substack{m+1 < p \leq 2m+1 \\ p \text{ premier}}} p \leq \binom{2m+1}{m} \leq 4^m.$$

13. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \leq 4^n$.

Comme préconisé, démontrons le résultat par récurrence forte sur n .

L'initialisation, pour $n = 0$, est évidente : $\alpha_0 = 1 \leq 4^0$.

Pour l'hérédité, soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la proposition soit vraie jusqu'au rang $n - 1$. Alors

- si n est impair, $n = 2m + 1$, alors on écrit que

$$\alpha_n = \alpha_m \times \prod_{\substack{m+1 < p \leq 2m+1 \\ p \text{ premier}}} p \leq 4^m \times 4^m \leq 4^{2m} \leq 4^{2m+1}$$

- si n est pair, on écrit $n = 2m + 2$ (comme $n \neq 0$, on peut écrire un nombre pair sous cette forme !). Mais $2m + 2$ n'est pas premier, donc $\alpha_{2m+2} = \alpha_{2m+1} = \alpha_{n-1}$. Ainsi $\alpha_n = \alpha_{n-1} \leq 4^{n-1} \leq 4^n$.

D'où l'hérédité, et le résultat par récurrence forte.

14. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $2 \leq m \leq n$. Montrer que $m^{\pi(n) - \pi(m)} \leq 4^n$.

Comme $\alpha_n \leq 4^n$, on en déduit, a fortiori, que

$$\prod_{\substack{m \leq p \leq n \\ p \text{ premier}}} p \leq 4^n.$$

Mais

$$\prod_{\substack{m \leq p \leq n \\ p \text{ premier}}} p \geq \prod_{\substack{m \leq p \leq n \\ p \text{ premier}}} m = m^{\pi(n) - \pi(m)}.$$

Donc $m^{\pi(n)-\pi(m)} \leq 4^n$, d'où, en passant au ln,

$$(\pi(n) - \pi(m)) \ln(m) \leq n \ln(4),$$

$$\text{i.e. } \pi(n) \leq \frac{n \ln 4}{\ln m} + \pi(m).$$

15. En déduire que pour tout $m \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, pour tout $n \in \llbracket m, +\infty \llbracket$,

$$\pi(n) \leq \frac{n \ln 4}{\ln m} + \pi(m).$$

L'inégalité précédente est entre deux réels dans $]0, +\infty[$. Donc en passant au ln,

$$(\pi(n) - \pi(m)) \ln(m) \leq n \ln(4),$$

$$\text{i.e. } \pi(n) \leq \frac{n \ln 4}{\ln m} + \pi(m).$$

16. Déterminer alors la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\frac{\pi(n)}{n}$ et en déduire $\delta(\mathbb{P})$.

Cela fait penser à l'exercice fait en classe $u_n \leq \frac{k}{n} + \frac{1}{k}$. Procédons de même ! On sait que pour tous n et m tels que $2 \leq m \leq n$,

$$\frac{\pi}{n} \leq \frac{\ln(4)}{\ln(m)} + \frac{\pi(m)}{n}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\ln(4)}{\ln(m)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq m$ et $\frac{\pi(m)}{N} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $0 \leq \frac{\pi(n)}{n} \leq \varepsilon$.

Ceci signifie exactement que $\frac{\pi(n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Ainsi, $\delta(\mathbb{P}) = 0$. C'est le théorème de raréfaction des nombres premiers.

Hadamard et De la Vallée Poussin ont en fait démontré le **théorème des nombres premiers** :

$$\pi(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}$$

On admet ce théorème (démontrable en deuxième année avec peine !)

17. En quoi cela permet-il de retrouver la valeur de $\delta(\mathbb{P})$?

Si on sait que $\pi(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}$, alors

$$\frac{\text{Card}(\mathbb{P} \cap \llbracket 1, n \rrbracket)}{n} = \frac{\pi(n)}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On retrouve ainsi que $\delta(\mathbb{P}) = 0$.

18. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le n -ième nombre premier. Démontrer que $p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n)$.

On pourra déterminer une expression évidente et un équivalent de $\pi(p_n)$, et on pourra démontrer que $\ln(p_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

On sait que $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\pi(p_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{p_n}{\ln(p_n)}$. Mais $\pi(p_n) = n$ (comme p_n est le n -ième nombre premier, il y a n nombres premiers inférieurs ou égaux à p_n). Ainsi,

$$\frac{p_n}{\ln(p_n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n.$$

Or, si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(v_n)$. En effet,

$$\ln(u_n) = \ln \frac{u_n}{v_n} + \ln(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(v_n),$$

car $\ln(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\ln \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Comme $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, $\frac{p_n}{\ln(p_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ par croissances comparées. Ainsi,

$$\ln \left(\frac{p_n}{\ln(p_n)} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$

Mais,

$$\ln \left(\frac{p_n}{\ln(p_n)} \right) = \ln(p_n) - \ln(\ln(p_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(p_n),$$

car $\ln(p_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $\ln(\ln(p_n)) = o(\ln(p_n))$.

Problème 2. Autour des contractions

Le but de ce problème est d'étudier quelques exemples de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

On considère $k \in]0, 1[$.

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est k -contractante, ou que c'est une k -contraction pour dire que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

De manière semblable, on dit qu'une fonction $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une k -contraction, ou que c'est une k -contraction pour dire que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, |g(x) - g(y)| \leq k|x - y|.$$

Partie I. Premiers résultats

Soit f une k -contraction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer que si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifie $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \mathbb{C}$, alors $f(a_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(\ell)$.

Comme f est une k -contraction,

$$|f(a_n) - f(\ell)| \leq k|a_n - \ell| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0,$$

donc $f(a_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(\ell)$.

2. Démontrer que f admet au plus un point fixe.

Soient ℓ et ℓ' deux points fixes de f . Alors $f(\ell) = \ell$ et $f(\ell') = \ell'$. Donc

$$|\ell - \ell'| = |f(\ell) - f(\ell')| \leq k|\ell - \ell'|.$$

Si on avait $|\ell - \ell'| \neq 0$, on aurait $1 \leq k$, absurde car $k \in]0, 1[$. Donc $|\ell - \ell'| = 0$.

3. On suppose dans cette question et la suivante que f admet un point fixe ℓ . Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$.

On démontre par récurrence sur n que

$$(\mathcal{P}_n) \quad |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$$

L'initialisation est évidente : $|u_0 - \ell| \leq k^0 |u_0 - \ell|$.

Ensuite, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$. Alors

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq k|u_n - \ell| \leq k \cdot k^n |u_0 - \ell| = k^{n+1} |u_0 - \ell|,$$

d'où l'hérédité et le résultat par le principe de récurrence.

Ainsi,

$$|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$$

donc, par encadrement, $|u_n - \ell| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

4. En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|.$$

Comme $|k| < 1$, $k^n |u_0 - \ell| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Donc, par encadrement, $|u_n - \ell| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

C'est que $\lim(u_n) = \ell$.

Partie II. Le théorème du point fixe de Banach-Picard

Le but de cette section est de démontrer le résultat suivant :

Proposition 1. Soient $k \in]0, 1[$ et f une k -contraction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Ainsi, f admet un unique point fixe.

Pour démontrer ce résultat, on prend f une contraction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, puis on choisit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in \mathbb{C}$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

5. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$.

Déjà, on sait que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_{n+2} - u_{n+1}| = |f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leq k |u_{n+1} - u_n|$ donc on montre par récurrence comme dans la partie précédente, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$.

6. En déduire, à l'aide d'un télescopage, que pour tous m, n dans $\mathbb{N}$ tels que $m \leq n$,

$$|u_n - u_m| \leq k^m \frac{1 - k^{n-m}}{1 - k} |u_1 - u_0|,$$

Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leq n$. On a

$$\begin{aligned} |u_n - u_m| &= \left| \sum_{i=m}^{n-1} u_{i+1} - u_i \right| \\ &\leq \sum_{i=m}^{n-1} |u_{i+1} - u_i| \\ &\leq \sum_{i=m}^{n-1} k^i |u_1 - u_0| \\ &\leq k^m \frac{1 - k^{n-m}}{1 - k} |u_1 - u_0|, \end{aligned}$$

d'où le résultat visé.

7. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

On remarque que comme $k \in]0, 1[$, $k^m \frac{1 - k^{n-m}}{1 - k} \leq \frac{1}{1 - k}$, donc pour n quelconque et $m = 0$,

$$|u_n| = |u_n - u_0 + u_0| \leq |u_n - u_0| + |u_0| \leq \frac{1}{1 - k} |u_1 - u_0| + |u_0|,$$

donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

8. Conclure qu'il existe une extraction φ et un complexe ℓ tels que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{C}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une suite extraite qui converge.

9. Démontrer enfin que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, puis que f admet un point fixe. On pourra choisir une extraction φ comme ci-avant puis remarquer que $u_n - \ell = u_n - u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)} - \ell$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} |u_n - \ell| &= |u_n - u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)} - \ell| \\ &\leq |u_{\varphi(n)} - u_n| + |u_{\varphi(n)} - \ell| \\ &\leq k^n \frac{1 - k^{\varphi(n)-n}}{1 - k} |u_1 - u_0| + |u_{\varphi(n)} - \ell| \\ &\leq \frac{k^n}{1 - k} |u_1 - u_0| + |u_{\varphi(n)} - \ell| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

le premier terme étant géométrique et le second tendant vers 0 par convergence de l'extraction !
On en déduit donc que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, donc $u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et, par continuité de f , $u_{n+1} = f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$, donc, par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$: f admet donc un point fixe.

Partie III. Le cas des semi-contractions

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

Proposition 2. Soit f une semi-contraction, i.e. une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

10. Trouver trois exemples de fonctions affines f tels que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge/tende vers $+\infty/n$ 'ait pas de limite. Ainsi s'intéresse-t-on à la limite de $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et pas à celle de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si $f : x \mapsto x + 1$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est égale à $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ donc diverge.

Si $f : x \mapsto x$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 0.

Si $f : x \mapsto -x + 1$, alors $u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = 1$, etc, donc la suite n'a pas de limite.

III-A. Le lemme de Fekete

Il s'agit ici d'établir un lemme préliminaire. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs qui est sous-additive, c'est-à-dire que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, a_{m+n} \leq a_m + a_n.$$

Notre but est de démontrer que $\frac{a_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf(\mathcal{A})$, où $\mathcal{A} = \left\{ \frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

- 11.** Soit $(n, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soient q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par N . Démontrer que

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{a_N}{N} + \frac{M_N}{n},$$

où $M_N = \max\{a_0, a_1, \dots, a_{N-1}\}$.

On écrit simplement que

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{n} &= \frac{a_{qN+r}}{n} \\ &\leq \frac{a_{qN} + a_r}{n} \text{ par sous-additivité.} \\ &\leq \frac{qa_N + a_r}{n} \text{ par récurrence immédiate : } a_{qN} \leq a_N + a_{(q-1)N} \leq \dots \\ &\leq \frac{q}{qN+r} a_N + \frac{a_r}{n} \\ &\leq \frac{q}{qN} a_N + \frac{a_r}{n} \\ &\leq \frac{a_N}{N} + \frac{a_r}{n} \\ &\leq \frac{a_N}{N} + \frac{M_N}{n}, \end{aligned}$$

car $r \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, donc $a_r \leq \max\{a_0, \dots, a_{N-1}\}$.

- 12.** Démontrer alors que $\frac{a_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf(\mathcal{A})$ (en justifiant que $\inf(\mathcal{A})$ existe bien).

On aura intérêt à utiliser les ε , et notamment une caractérisation bien choisie de la borne inférieure.

Déjà, $\mathcal{A}$ est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ donc admet une borne inférieure.

Ensuite, soit $\varepsilon > 0$. Alors on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a_N}{N} \leq \inf(\mathcal{A}) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit ensuite $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N', \frac{M_N}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $n \geq N'$. Alors

$$0 \leq \frac{a_n}{n} \leq \inf(\mathcal{A}) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \inf(\mathcal{A}) + \varepsilon,$$

d'où la convergence de $\frac{a_n}{n}$ vers $\inf(\mathcal{A})$!

III-B. Deux autres résultats préliminaires

13. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite tendant vers $+\infty$. Démontrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, v_n \geq v_k.$$

C'est un petit twist par rapport à ce que l'on connaît de la limite infinie ! Soit $N \in \mathbb{N}$. Prenons $M = 1 + \max_{0 \leq k \leq N} v_k$.

Alors on dispose de $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, $u_n \geq M$. $N' \geq N$ car tous les u_k pour $k \leq N$ sont strictement inférieurs à M .

Considérons alors $M' = \max\{u_k, k \leq N'\}$. On dispose de n tel que $u_n = M'$. Comme $M' \geq u_N$, on sait que $u_n \geq M$ donc $n \geq N$.

Ainsi, $n \geq N$ et $u_n \geq M' \geq \max\{u_k, k \leq n\}$.

14. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite sous-additive, telle que $\frac{a_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A > 0$. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout N dans $\mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_n \geq a_{n-k} + (A - \varepsilon)k.$$

On pourra commencer en déterminant la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $a_n - n(A - \varepsilon)$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. On remarque que

$$\frac{a_n - n(A - \varepsilon)}{n} = \frac{a_n}{n} - (A - \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varepsilon > 0,$$

donc $a_n - n(A - \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Par la question précédente, on dispose de $n \geq N$ tel que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_n - n(A - \varepsilon) \geq a_{n-k} - (n - k)(A - \varepsilon).$$

Ainsi, pour k dans $\llbracket 0, n \rrbracket$,

$$a_n \geq a_{n-k} + k(A - \varepsilon).$$

III-C. Démonstration de la proposition 2

On note, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $d_n = |u_n - u_0| = |u_n|$ (on rappelle que l'on a supposé $u_0 = 0$).

15. Démontrer que $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite sous-additive, puis que $\left(\frac{d_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On note A sa limite.
-

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Alors

$$\begin{aligned} d_{n+m} &= |u_{n+m} - u_0| \\ &= |u_{n+m} - u_n + u_n - u_0| \\ &\leq |u_{n+m} - u_n| + |u_n - u_0| \end{aligned}$$

Or,

$$|u_{n+m} - u_n| = |f(u_{n+m-1}) - f(u_{n-1})| \leq |u_{n+m-1} - u_{n-1}| \leq \dots \leq |u_m - u_0|,$$

par récurrence immédiate. Ainsi,

$$d_{n+m} \leq |u_m - u_0| + |u_n - u_0| = d_m + d_n.$$

Donc la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sous-additive. Ainsi, $\left(\frac{d_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, par le lemme de Fekete.

16. Justifier que si $A = 0$, la proposition est démontrée.

Si $A = 0$, alors $\frac{u_n - u_0}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, d'où le résultat désiré.

On suppose désormais que $A > 0$.

17. Démontrer, en utilisant la question 14., qu'il existe une suite $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0 et une suite d'entiers $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$, tendant vers $+\infty$, telles que pour tout i ,

$$\forall \ell \in \llbracket 0, n_i \rrbracket, d_{n_i} \geq d_{n_i - \ell} + (A - \varepsilon_i)\ell,$$

ET telle que la suite $(u_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ soit à valeurs non nulles et de signe constant.

Par la question 14., on sait que pour tout N dans $\mathbb{N}$, on dispose de $n \geq N$ tel que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, d_n \geq d_{n-k} + (A - \varepsilon)k$.

On construit alors une extraction φ de la sorte :

- pour $n = 0$, posons $\varepsilon_0 = \frac{1}{2^0}$. Alors on dispose de $\varphi(0) \geq 0$ tel que $\forall \ell \leq \varphi(0), d_{\varphi(0)} \geq d_{\varphi(0) - \ell} + (A - \varepsilon_0)\ell$
- si $\varphi(n)$ est construit, on prend $\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$ et $N = \varphi(n) + 1$, on dispose de $m \geq N$ tel que

$$\forall \ell \leq m, d_m \geq d_{m-\ell} + (A - \varepsilon_{n+1})\ell,$$

on pose alors $\varphi(n+1) = m$.

On a donc construit une extraction φ qui satisfait presque toutes les propriétés désirées. Mais $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ contient ou bien une infinité de termes strictement positifs, ou bien une infinité de termes strictement négatifs. Ceci permet de conclure la preuve de la propriété.

On considère deux telles suites $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$. On suppose que pour tout i dans $\mathbb{N}$, $u_{n_i} > 0$. On va démontrer, à l'aide de cette sous-suite, que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de signe constant.

18. Soit $i \in \mathbb{N}$. Démontrer que, pour tout entier naturel $\ell \leq n_i$,

$$-u_\ell \leq |u_\ell - u_{n_i}| - |u_{n_i}| \leq d_{n_i-\ell} - d_{n_i} \leq -(A - \varepsilon_i)\ell.$$

Soit $\ell \in \llbracket 1, n_i \rrbracket$. Alors

$$\begin{aligned} -u_\ell &= u_{n_i} - u_\ell - u_{n_i} \\ &\leq |u_{n_i} - u_\ell| - |u_{n_i}| \\ &\leq |f(u_{n_i-1}) - f(u_{\ell-1})| - |u_{n_i}| \\ &\leq |u_{n_i-1} - u_{\ell-1}| - |u_{n_i}| \\ &\leq \dots \text{ (récurrence)} \\ &\leq |u_{n_i-\ell} - u_0| - |u_{n_i}| \\ &\leq d_{n_i-\ell} - d_{n_i} \\ &\leq -(A - \varepsilon_i)\ell. \end{aligned}$$

D'où le résultat à démontrer.

19. Conclure alors que $u_\ell \geq 0$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ puis que $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} A$.

Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. Comme $(n_i)_i$ tend vers $+\infty$, on choisit $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall i \in \llbracket i_0, +\infty \rrbracket, \quad n_i \geq \ell.$$

Soit $i \in \llbracket i_0, +\infty \rrbracket$. Alors $-u_\ell \leq -(A - \varepsilon_i)\ell$, donc $u_\ell \geq (A - \varepsilon_i)\ell$.

Comme $(\varepsilon_i)_i$ tend vers 0, par passage à la limite quand i tend vers l'infini, on obtient $u_\ell \geq 0$.

Mais alors, $\frac{u_\ell}{\ell} = \frac{d_\ell}{\ell} \xrightarrow[\ell \rightarrow +\infty]{} A$.

20. Comment adapter le cas où $(u_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ est à valeurs strictement négatives ?

Si $(u_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ est à valeurs strictement négatives, alors, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on écrit

$$u_\ell = u_\ell - u_{n_i} + u_{n_i} \leq |u_{n_i} - u_\ell| - |u_{n_i}|,$$

et on est ramené au problème précédent.