

TD 12 Dérivabilité

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. ●●○ Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{cases}$

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $\forall x > 0$, $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. *Théorème de Rolle à l'infini.* ●●○ Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]0, +\infty[$ et telle que $f(0) = \lim_{+\infty} f = 0$. On souhaite démontrer qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

1. Démontrer que le résultat est trivial si f est constante.

On suppose désormais que f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'on dispose de $c > 0$ tel que $f(c) > 0$.

2. Démontrer qu'il existe $a \in]0, c[$ et $b \in]c, +\infty[$ tel que $f(a) = f(b)$.
3. Conclure

Exercice 3. *Polynômes de Legendre.* ●●○ Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On définit, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $P_n(x) = (x^2 - 1)^n$.

1. Démontrer que pour tout $k \leq n - 1$, $P_n^{(k)}$ s'annule en -1 et en 1 .
2. Démontrer que pour tout $k \leq n$, $P_n^{(k)}$ s'annule k fois sur $] -1, 1[$.

Exercice 4. ●○○ Soit $a > 0$. Déterminer, en utilisant le théorème des accroissements finis, la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\text{Arctan}(n+a) - \text{Arctan}(n)).$$

Exercice 5. *La règle de L'Hôpital.* ●●○

1. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

2. Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I non vide et non réduit à un point et x_0 une extrémité (finie ou non) de I . On suppose que f et g tendent vers 0 en x_0 et que g et g' ne s'annulent pas sur $I \setminus \{x_0\}$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Prouver l'implication

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \right) \implies \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \right).$$

3. Retrouver comme cas particulier le théorème de la limite de la dérivée vu en cours.
4. Appliquer ce résultat aux calculs des limites suivantes

$$(a) \lim_{x \rightarrow e} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln x - 1}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x - \sin \frac{1}{x}}{e^x - e^{1/x}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x} \quad (c \neq d),$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

Stratégie :

- Il faut pouvoir calculer des dérivées : les exercices 6 et 7 servent à cela.
- Il faut pouvoir étudier des dérivabilités : les exercices 10, 11, 12 (prolongement de 12) sont dédiés à cela.
- Deux exercices s'appuient sur la dérivée comme développement limité à l'ordre 1 : l'exercice 8, assez simple, et l'exercice 15, beaucoup plus complexe.
- Des applications du théorème de Rolle : quelques très classiques comme 16 ou . Les exercices 17, 18 et 19 sont aussi des applications très faisables de Rolle.
- Des applications du TAF : outre 4, les exercices 21 et 22 sont assez importants. 23 est une variation.
- Quelques autres exercices intéressants comme 24 et surtout 25.

Minimum requis : exercice 6 ((a) et (d)), exercice 7 ((a) et (b)), exercice 12 **si jamais le 1 a mal été compris**, exercice 16 et 3, exercice 21.

2 Dérivabilité et définition de la dérivée – classe $\mathcal{C}^n$ – limite de la dérivée

Exercice 6. ●○○○

Dériver les fonctions suivantes

$$1. f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$2. g : x \mapsto \sqrt[3]{\sin\left(\frac{x+1}{x+2}\pi\right)}$$

$$3. h : x \mapsto \ln\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x}\right)$$

$$4. k : x \mapsto \sqrt{\tan(x)}.$$

Exercice 7. ●○○○

Calculer les dérivées n -ièmes des fonctions suivantes

$$1. f : x \mapsto a^x \quad (a > 0)$$

$$3. h : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$2. g : x \mapsto xe^x$$

$$4. k : x \mapsto e^{x\sqrt{3}} \cos(x)$$

Exercice 8. Démontrer que les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = \frac{1}{x}$ admettent une unique tangente commune.

Exercice 9. ●○○○

Que dire de la dérivée d'une fonction paire ? d'une fonction impaire ? d'une fonction périodique ?

Exercice 10. ●○○

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes

1. $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$
2. $g : x \mapsto \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1, \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1. \end{cases}$
3. $h : x \mapsto x|x|$
4. $k : x \mapsto \frac{|x|}{1+|x-1|}$

Exercice 11. ●●○

1. À quelle condition la valeur absolue d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est-elle dérivable ?
2. À quelle condition le maximum de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est-il dérivable ?

Exercice 12. ●●○ Soit f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et représenter le graphe de f .

Exercice 13. ●●● Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(0) = 0$.

Montrer qu'il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x positif on ait $f(x) = g(x^2)$.

Exercice 14. ●●○ Soit, pour λ et μ dans $\mathbb{R}$, $\varphi_{\lambda,\mu} : x \mapsto e^x + \lambda e^{-x} + \mu x$. Déterminer une CNS sur λ et μ pour que $\varphi_{\lambda,\mu}$ soit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ dont la bijection réciproque est $\mathcal{C}^1$.

Exercice 15. ●●●

1. Soit f dérivable en 0. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ existe et la déterminer (on reviendra à la définition de la dérivabilité en termes de développement limité).
2. Application : montrer que $\prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

3 Théorèmes globaux

3.1 Théorème de Rolle

Exercice 16. ●●○ Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour toute $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, si f est n fois dérivable sur $[0, 1]$ et si f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[0, 1]$, alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[0, 1]$.

Exercice 17. ●●○

Soit P un polynôme. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18. ●●○ Soient a et b deux réels, n un entier supérieur ou égal à 2. On considère $P : x \mapsto x^n + ax + b$.

1. Montrer que P s'annule au plus 3 fois sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si n est pair, P s'annule au plus 2 fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19. ●●○ Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable, telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $\exists a > 0, f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un point de la courbe de f , différent de l'origine, où la tangente passe par l'origine du repère.

Exercice 20. ●●● Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et bornée.

1. Montrer que si une dérivée $f^{(k)}$ admet un nombre fini de zéros, alors les dérivées précédentes $f^{(p)}, 1 \leq p < k$ tendent vers 0 en $\pm\infty$.
2. Rappeler le théorème de Rolle à l'infini.
3. En déduire que, pour $k \geq 2$, $f^{(k)}$ s'annule au moins $k - 1$ fois.

3.2 Théorème et inégalité des accroissements finis

Exercice 21. ●○○

Montrer les inégalités suivantes

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(y)| \leq |x - y|$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+, x \leq e^x - 1 \leq xe^x$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \operatorname{ch}(x) - 1 \leq x \operatorname{sh}(x)$

Exercice 22. *Série harmonique – le retour.* ●○○ En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$$

En déduire (pour la $n + 1$ -ième fois) que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k} = +\infty$, et déterminer, si elle existe, la limite

quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Exercice 23. ●●○ Soit f une fonction dérivable d'un segment $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(a) = f(b)$ et que $f'(a) = 0$. Montrer qu'il existe c dans $]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

(comme dans la plupart des démonstrations du cours, on choisira une fonction auxiliaire adéquate)

4 Autres exercices

Exercice 24. *Vers de l'analyse un peu fine.* ●●○

Soit f une fonction continûment dérivable de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, telle que
$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f'(0) = 1, \\ f(1) < 0. \end{cases}$$

On veut montrer qu'il existe un « premier temps de retour à 0 », c'est-à-dire qu'il existe un réel a de $[0, 1]$ tel que

$$f(a) = 0 \text{ et } \forall 0 < x < a, f(x) \neq 0.$$

1. Montrer qu'il existe un réel δ tel que $\forall x \in]0, \delta[, f(x) > 0$.
2. Considérons alors l'ensemble $A = \{\delta \in]0, 1[, \forall x \in]0, \delta[, f(x) > 0\}$.
 - (a) Justifier que A a une borne supérieure, appelons-la a .
 - (b) Montrer que $f(a) = 0$.
 - (c) Montrer que $\forall x \in]0, a[, f(x) > 0$, et conclure.

Exercice 25. ●●● Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable. On définit

$$\Phi : \begin{cases} [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \end{cases} \quad \text{et} \quad \Psi : \begin{cases} [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} & \text{si } x \neq b \\ f'(b) & \text{si } x = b \end{cases} \end{cases}$$

1. En étudiant les fonctions Φ et Ψ , montrer que f' prend toutes les valeurs du segment d'extrémités $f'(a)$ et $f'(b)$.
Ainsi, f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Pourquoi ne peut-on pas appliquer le TVI sur f' ?

Indications.

- 6 Calculs directs. Ne pas hésiter, quand il y a une dérivée compliquée, à l'écrire sous la forme $f \circ g \circ h$ et à expliciter sa dérivée à l'aide de la règle de la chaîne.
- 7
 1. Récurrence évidente.
 2. Utiliser la formule de Leibniz : $x \mapsto xe^x$
 3. Essayer d'exprimer h simplement, en écrivant $x^2 + 1 = 2 + x^2 - 1$, puis en écrivant $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1}$ avec a et b à déterminer.
- 8 **ATTENTION !** La tangente commune n'est pas tangente aux deux courbes **au même point**.
Un conseil : écrire l'équation de la tangente à la courbe de $x \mapsto x^2$ en $a \in \mathbb{R}$ et l'équation de la tangente à la courbe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ en $b \in \mathbb{R}^*$, puis égaliser les deux équations de tangentes.
- 9 Écrire les définitions, et dériver les égalités en faisant attention aux fonctions composées.
- 10 Utiliser les théorèmes généraux pour toutes les fonctions non problématiques, puis utiliser le théorème de la limite de la dérivée ou bien le taux de variations.
- 11
 1. Montrer que $|f|$ est dérivable si et seulement si $\forall a \in \mathbb{R}, f(a) = 0 \Rightarrow f'(a) = 0$. (en montrant la réciproque, puis la contraposée du sens direct)
 2. Utiliser les expressions du maximum et du minimum à l'aide de la valeur absolue !
- 12 Remarquer que $\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + x}$ et utiliser l'exercice 1.

- 15 Utiliser la seconde définition de la dérivabilité ($f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x)$) puis injecter cette expression dans la somme. Ensuite, séparer les cas $f(0) \neq 0$ et $f(0) = 0$, puis, dans le cas $f(0) = 0$, revenir aux ε .
- 13 Écrire ce que l'on veut avoir (« $g(x) = f(\sqrt{x})$ ») et utiliser le théorème de prolongement de la classe $\mathcal{C}^1$.
- 14 Penser aux conditions pour être une bijection (en termes de monotonie) et aux conditions pour avoir la dérivabilité de la réciproque !
- 16 Appliquer n fois le théorème de Rolle (fait en cours).
- 17 Utiliser Rolle plusieurs fois et penser qu'à partir d'un certain n , $P^{(n)}$ est nul.
- 18 **1.** Si ce n'est pas le cas, appliquer plusieurs fois le théorème de Rolle.
2. Utiliser que si n est pair, alors la dérivée de la fonction s'annule au moins une fois.
- 19 Démontrer que cela revient à avoir l'existence d'un c tel que $0 = f(c) - cf'(c)$, i.e. $c \left(\frac{f(c)}{c} - f'(c) \right) = 0$, et appliquer le théorème de Rolle à une fonction bien choisie.
- 20 Penser au fait que si f^k a un nombre fini de zéros, après son dernier zéro elle est de signe constant, donc $f^{(k-1)}$ est monotone...
- 21 Il s'agit uniquement d'applications du théorème ou de l'inégalité des accroissements finis.
- 22 Essayer d'encadrer $\ln(x+1) - \ln(x)$ sur $[n, n+1]$ à l'aide du théorème des accroissements finis.
- 23 Ressemble beaucoup à 19... Introduire $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a, \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$
- 24 **1.** Utiliser la seconde définition de la dérivée.
2. (a)
(b) Montrer que $a \neq 1$, puis raisonner par l'absurde en supposant $f(a) \neq 0$.
(c) Utiliser la caractérisation de la borne supérieure.
- 25 Prendre M entre $f'(a)$ et $f'(b)$ et encadrer M entre une valeur de Φ et une valeur de Ψ . Pour cela, penser que si $\Phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell < \alpha$, alors $\Phi(x) < \alpha$ au voisinage de a . Ensuite appliquer le TVI à Φ ou à Ψ .