TD 12
Dérivabilité

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. ●◐○ Soit $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0. \end{cases} \end{array} \right.$

1. Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $\forall x > 0$, $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. *Théorème de Rolle à l'infini*. ●◐○ Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]0, +\infty[$ et telle que $f(0) = \lim\limits_{+\infty} f = 0$. On souhaite démontrer qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

1. Démontrer que le résultat est trivial si f est constante.

On suppose désormais que f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'on dispose de $c > 0$ tel que $f(c) > 0$.

2. Démontrer qu'il existe $a \in]0, c[$ et $b \in]c, +\infty[$ tel que $f(a) = f(b)$.

3. Conclure

Exercice 3. *Polynômes de Legendre*. ●●○ Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On définit, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $P_n(x) = (x^2 - 1)^n$.

1. Démontrer que pour tout $k \leqslant n - 1$, $P_n^{(k)}$ s'annule en -1 et en 1.

Écrivons $P_n(x) = (x - 1)^n(x + 1)^n = f_n g_n$. Alors, par la formule de Leibniz, pour tout k, pour tout x dans $\mathbb{R}$.

$$P_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f_n^{(j)}(x) g_n^{(k-j)}(x).$$

Mais, si $j \in [\![0, k]\!]$, $f_n^{(j)}(x) = \dfrac{n!}{(n-j)!}(x-1)^{n-j}$, qui s'annule en 1, et $g_n^{(k-j)}(x) = \dfrac{n!}{(k-j)!}(x+1)^{n-k+j}$, qui s'annule en -1. Donc $P_n^{(k)}$ s'annule en -1 et en 1.

---

2. Démontrer que pour tout $k \leqslant n$, $P_n^{(k)}$ s'annule k fois sur $]-1, 1[$.

Démontrons le résultat par récurrence sur k.
Initialisation. $P_n^{(0)} = P_n$ s'annule en -1 et en 1.
Hérédité. Supposons que, pour un certain $k \leqslant n - 1$, $P_n^{(k)}$ s'annule en k points sur $]-1, 1[$, nommons ces points $x_1, \dots, x_k$. Alors, pour tout i dans $[\![1, k-1]\!]$, $P_n^{(k)}$ est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$, dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$, s'annule en x_i et en x_{i+1} donc, d'après le théorème de Rolle, $P_n^{(k+1)}$

s'annule sur $]x_i, x_{i+1}[$. Donc P_n^{k+1} s'annule en $k-1$ points de $]-1,1[$.
De plus, $P_n^{(k)}$ s'annule en -1 et en 1, donc, en appliquant le théorème de Rolle entre -1 et x_1 puis entre x_k et 1, on obtient deux zéros supplémentaires de $P_n^{(k+1)}$.
Donc $P_n^{(k+1)}$ s'annule $k+1$ fois, d'où l'hérédité et le résultat !

Exercice 4. ●○○ Soit $a > 0$. Déterminer, en utilisant le théorème des accroissements finis, la limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^2(\mathrm{Arctan}(n+a) - \mathrm{Arctan}(n)).$$

Exercice 5. *La règle de L'Hôpital*. ●●○

1. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Il s'agit de ce que l'on appelle la formule des « accroissements finis généralisés » . On va donc la démontrer de manière similaire au TAF. Considérons la fonction h définie sur $[a,b]$ par

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

Alors h est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et

$$h(a) = (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a),$$
$$h(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b) = h(a).$$

Donc d'après le théorème de Rolle, il existe un réel c de $]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$, i.e. tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0,$$

i.e.

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

---

2. Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I non vide et non réduit à un point et x_0 une extrémité (finie ou non) de I. On suppose que f et g tendent vers 0 en x_0 et que g et g' ne s'annulent pas sur $\mathrm{I}\backslash\{x_0\}$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Prouver l'implication

$$\left(\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell\right) \implies \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell\right).$$

Il faut distinguer deux cas : le cas où $x_0 \in \mathbb{R}$, et le cas où cette borne est infinie.

- Cas où $x_0 \in \mathbb{R}$. Quitte à remplacer f et g par leur prolongement par continuité en x_0, on peut supposer f et g définies, continues, et s'annulant en x_0. En appliquant le théorème des accroissements finis généralisé entre x_0 et $x \neq x_0$, on obtient l'existence de c_x entre x_0 et x tel que

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},$$

i.e.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Or, par encadrement, $\lim_{x\to x_0} c_x = x_0$, donc en composant les limites, $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \ell$. Donc $\frac{f(x)}{g(x)}$ converge et $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

- Cas où $x_0 = +\infty$. Posons alors deux fonctions F et G, définies sur un voisinage épointé à droite 0 par $F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $G(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$. Alors f et g vérifient les hypothèses du résultat précédent, et

$$\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{-\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2} g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)} \xrightarrow[x\to 0+]{} \ell.$$

On en déduit donc le résultat pour $x_0 = +\infty$!

---

3. Retrouver comme cas particulier le théorème de la limite de la dérivée vu en cours.

On retrouve le résultat en prenant $g(x) = x$!

---

4. Appliquer ce résultat aux calculs des limites suivantes

(a) $\lim_{x\to e} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln x - 1}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x}$ $(c \neq d)$,

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin x - \sin \frac{1}{x}}{e^x - e^{1/x}}$

(d) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$

Applications (on ne réécrit pas à chaque fois que les fonctions vérifient les hypothèses de la règle de l'Hôpital mais c'est important de les vérifier : est important le fait que g' soit de signe constant autour de x_0. En effet, si

$$f(x) = x + \cos(x)\sin(x) \text{ et } g(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}(x + \cos(x)\sin(x))$$

alors

$$f'(x) = 2\cos^2(x) \text{ et } g'(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}\cos(x)(x + \sin(x)\cos(x) + 2\cos(x))$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cos(x)}{\mathrm{e}^{\sin(x)}(x+\sin(x)\cos(x)+2\cos(x))} = 0,$$

mais $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\sin(x)}}$ n'admet pas de limite en $+\infty$!)

(a) $\displaystyle\lim_{x\to e}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln x-1}=\lim_{x\to e}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}=\sqrt{e}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a)a^x-\ln(b)b^x}{\ln(c)c^x-\ln(d)d^x}=\frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{\ln\left(\frac{c}{d}\right)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin x-\sin\frac{1}{x}}{e^x-e^{1/x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\cos x+\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}}{e^x+\frac{1}{x^2}e^{1/x}}=\frac{\cos(1)}{e}$

Stratégie :

- Il faut pouvoir calculer des dérivées : les exercices 6 et 7 servent à cela.
- Il faut pouvoir étudier des dérivabilités : les exercices 10, 11, 12 (prolongement de 12) sont dédiés à cela.
- Deux exercices s'appuient sur la dérivée comme développement limité à l'ordre 1 : l'exercice 8, assez simple, et l'exercice 15, beaucoup plus complexe.
- Des applications du théorème de Rolle : quelques très classiques comme 16 ou . Les exercices 17, 18 et 19 sont ussi des applications très faisables de Rolle.
- Des applications du TAF : outre 4, les exercices 21 et 22 sont assez importants. 23 est une variation.
- Quelques autres exercices intéressants comme 24 et surtout 25.

Minimum requis : exercice 6 ((a) et (d)), exercice 7 ((a) et (b)), exercice 12 **si jamais le 1 a mal été compris**, exercice 16 et 3, exercice 21.

2 Dérivabilité et définition de la dérivée – classe $\mathscr{C}^n$ – limite de la dérivée

Exercice 6. ◐○○
Dériver les fonctions suivantes

1. $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$
2. $g : x \mapsto \sqrt[3]{\sin\left(\frac{x+1}{x+2}\pi\right)}$
3. $h : x \mapsto \ln\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2+x}\right)$
4. $k : x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$.

---

1. $f' : x \mapsto \dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$
2. $g' : x \mapsto \dfrac{1}{3}\left(\sin\left(\dfrac{x+1}{x+2}\pi\right)\right)^{-\frac{2}{3}}\times\cos\left(\dfrac{x+1}{x+2}\pi\right)\times\dfrac{\pi}{(x+2)^2}$.
3. $h' : x \mapsto \dfrac{4x^2-4x-2}{x(x+1)(x^2-3x+2)}$.

 walter.ngambou@ac-versailles.fr

4. $k' : x \mapsto \dfrac{1+\tan^2(x)}{2\sqrt{\tan(x)}}$.

Exercice 7. ●○○
Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions suivantes

1. $f : x \mapsto a^x$ $(a > 0)$
2. $g : x \mapsto xe^x$
3. $h : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
4. $k : x \mapsto e^{x\sqrt{3}}\cos(x)$

---

1. On montre par récurrence, et en utilisant que $a^x = e^{x\ln(a)}$, que pour tout n, $f^{(n)} : x \mapsto (\ln(a))^n a^x$.
2. On montre, en utilisant la formule de Leibniz, ou par récurrence que, pour tout n, $f^{(n)} : x \mapsto ne^x + xe^x$.
3. Écrivons
$$h(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2-1+2}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1},$$
donc si $n > 0$,
$$h^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left(\frac{1}{(x-1)^n} - \frac{1}{(x+1)^n}\right).$$
4. Écrivons $\cos(x) = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$. Alors pour tout réel x,
$$k(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x(\sqrt{3}+i)} + e^{x(\sqrt{3}-i)}\right),$$
donc
$$k^{(n)} = \frac{1}{2}\left((\sqrt{3}+i)^n e^{x(\sqrt{3}+i)} + (\sqrt{3}-i)^n e^{x(\sqrt{3}-i)}\right).$$
Or,
$$(\sqrt{3}+i)^n = 2^n e^{in\frac{\pi}{6}} \text{ et } (\sqrt{3}-i)^n = 2^n e^{-in\frac{\pi}{6}},$$
donc
$$k^{(n)}(x) = 2^n e^{\sqrt{3}x}\frac{e^{i\left(x+n\frac{\pi}{6}\right)} + e^{-i\left(x+n\frac{\pi}{6}\right)}}{2} = 2^n e^{\sqrt{3}x}\cos\left(x+n\frac{\pi}{6}\right).$$

Exercice 8. Démontrer que les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = \dfrac{1}{x}$ admettent une unique tangente commune.

Nommons $f_1 : x \mapsto x^2$ et $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ leurs courbes respectives.
Soit a dans $\mathbb{R}$. La tangente à $\mathscr{C}_1$ en a a pour équation $y = a^2 + 2a(x-a) = 2ax - a^2$.

Soit b dans $\mathbb{R}^*$. La tangente à $\mathscr{C}_2$ en b a pour équation $y = \frac{1}{b} - \frac{x-b}{b^2} = \frac{2}{b} - \frac{x}{b^2}$.
Ces deux droites coïncident si et seulement si

$$\begin{cases} 2a = -\dfrac{1}{b^2} \\ -a^2 = \dfrac{2}{b} \end{cases}$$

Ce système n'est pas linéaire, on peut substituer... La première équation étant $a = \frac{-1}{2b^2}$, la seconde devient $-\frac{1}{4b^4} = \frac{2}{b}$, i.e. $b^3 = -\frac{1}{8}$, i.e. $b = -\frac{1}{2}$, et donc $a = -2$. Réciproquement $(-2, -1/2)$ est bien solution.
Donc $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont une unique tangente commune, c'est la droite $y = -4x - 4$.

Exercice 9. ◐○○
Que dire de la dérivée d'une fonction paire ? d'une fonction impaire ? d'une fonction périodique ?

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. si f est paire alors pour tout x réel, $f(-x) = f(x)$ donc $-f'(-x) = f'(x)$ donc $f'(-x) = -f(x)$ donc f' est impaire.
2. si f est impaire alors pour tout x réel, $f(-x) = -f(x)$ donc $-f'(-x) = -f'(x)$ donc $f'(-x) = f(x)$ donc f' est paire.
3. si f est périodique, on dispose de $T > 0$ tel que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$, donc $f'(x+T) = f(x)$, donc f' est aussi T-périodique.

Exercice 10. ●○○
Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes

1. $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$
2. $g : x \mapsto \begin{cases} (x-1)^2 \text{ si } x \leqslant 1, \\ (x-1)^3 \text{ si } x > 1. \end{cases}$
3. $h : x \mapsto x|x|$
4. $k : x \mapsto \dfrac{|x|}{1+|x-1|}$

---

1. La fonction f est **continue** sur $\mathbb{R}_+$ par les théorèmes généraux, et, de même, elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x > 0$, $f' : x \mapsto -\frac{1}{2}\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$. Or, $\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc, par le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 de dérivée égale à $-\frac{1}{2}$.
2. g est continue sur $\mathbb{R}$ (notamment en 1, car les limites à gauche et à droite de g coïncident), dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $g' : x \mapsto \begin{cases} 2(x-1) \text{ si } x < 1, \\ 3(x-1)^2 \text{ si } x < 1. \end{cases}$ Donc $g'(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$, donc, par le théorème de la limite de la dérivée, g est dérivable en 1 de dérivée égale à 0.
3. h est dérivable en tout réel non nul par les théorèmes généraux. Montrons qu'elle est dérivable en 0 : pour tout x réel, $\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = |x| \underset{x\to \infty}{\longrightarrow} 0$. Donc h est dérivable en 0.

4. k est dérivable en tout réel différent de 0 et 1 par les théorèmes généraux.
Étude en 0. Pour tout réel x,

$$\frac{k(x)-k(0)}{x-0} = \frac{\frac{|x|}{1+|x-1|}}{x} = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{1+|x-1|},$$

n'a pas de limite quand x tend vers 0. Donc k n'est pas dérivable en 0.
Étude en 1. Pour tout réel x,

$$\frac{k(x)-k(1)}{x-1} = \frac{\frac{|x|}{1+|x-1|}-1}{x-1} = \frac{|x|-1-|x-1|}{(1+|x-1|)(x-1)}.$$

Si $x > 1$,

$$\frac{|x|-1-|x-1|}{(1+|x-1|)(x-1)} = \frac{x-1-(x-1)}{(1+x-1)(x-1)} = 0.$$

Si $0 < x < 1$,

$$\frac{|x|-1-|x-1|}{(1+|x-1|)(x-1)} = \frac{x-1-(1-x)}{(1+1-x|)(x-1)} = \frac{2}{2-x},$$

donc $\dfrac{k(x)-k(1)}{x-1}$ n'admet pas les mêmes limites à gauche et à droite en 1, donc k n'est pas dérivable en 1.

Exercice 11. ●◐○

1. À quelle condition la valeur absolue d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est-elle dérivable ?

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrons que $|f|$ est dérivable si et seulement si

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \ f(a) = 0 \Rightarrow f'(a) = 0.$$

On montre le sens réciproque :
Soit $a \in \mathbb{R}$.
Déjà, si a est dans $\mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq 0$, comme f est dérivable, elle est continue et on dispose de $\eta > 0$ tel que f ne s'annule pas et reste de signe constant sur $[a-\eta, a+\eta]$. Donc sur cet intervalle, f est du signe de $f(a)$. Si $f(a) > 0$, $\forall x \in [a-\eta, a+\eta], |f(x)| = f(x)$, dérivable, donc dérivable en a. Si $f(a) < 0$, $\forall x \in [a-\eta, a+\eta], |f(x)| = -f(x)$, dérivable, donc dérivable en a.
Maintenant, si $f(a) = 0$, alors $f'(a) = 0$, donc on dispose de ε qui tend vers 0 quand x tend vers a telle que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$f(x) = 0 + 0 \times (x-a) + \varepsilon(x) \times (x-a),$$

donc $|f(x)| = |\varepsilon(x)||x-a| = (x-a)|\varepsilon(x)||\eta(x)|$, avec $\eta(x) = 1$ si $x-a > 0$ et -1 si $x-a < 0$.
Donc $|\varepsilon(x)||\eta(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, donc $|f|$ est dérivable en a de dérivée nulle !
Sens direct : on montre la contraposée :
Supposons que $|f|$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit a tel que $f(a) = 0$. Comme $|f|$ est toujours positive, a est alors un minimum local de $|f|$ atteint à l'intérieur de l'intervalle considéré (on s'est placé sur $\mathbb{R}$), donc $|f|'(a) = 0$. On dispose alors de $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ et que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$|f(x)| = (x-a)\varepsilon(x).$$

Mais alors si on prend η la fonction égale au signe de f (et nulle quand f est nulle), on a pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = (x-a)\varepsilon(x)\eta(x)$, avec, comme η est bornée, $\varepsilon(x)\eta(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$. Donc $f'(a) = 0$. D'où le résultat !

---

2. À quelle condition le maximum de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est-il dérivable ?

Soient f et g deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors $\max(f,g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$, donc $\max(f,g)$ est dérivable ssi $|f-g|$ est dérivable, donc ssi

$$\forall a \in \mathbb{R},\ f(a) = g(a) \Rightarrow f'(a) = g'(a).$$

Exercice 12. ●●○ Soit f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et représenter le graphe de f.

On remarque que si on pose $g : x \mapsto \begin{cases} e^{\frac{1}{2(x-1)}} & \text{si } x < 1, \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$ et $h : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{2(x+1)}} & \text{si } x > -1, \\ 0 & \text{si } x \leqslant -1. \end{cases}$, alors $f = gh$. Or on a démontré en cours, par récurrence, le caractère $\mathscr{C}^\infty$ de $k : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } > 0, \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$, d'où celui de g et h et celui de f. On obtient une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support inclus dans un segment (i.e. nulle en-dehors de $[0,1]$)

Exercice 13. ●●◐ Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(0) = 0$.
Montrer qu'il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x positif on ait $f(x) = g\left(x^2\right)$.

Exercice 14. ●●○ Soit, pour λ et μ dans $\mathbb{R}$, $\varphi_{\lambda,\mu} : x \mapsto e^x + \lambda e^{-x} + \mu x$. Déterminer une CNS sur λ et μ pour que $\varphi_{\lambda,\mu}$ soit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ dont la bijection réciproque est $\mathcal{C}^1$.

Condition nécessaire. On suppose que λ et μ sont choisis de sorte que $\varphi_{\lambda,\mu}$ soit une bijection $\mathscr{C}^1$ de bijection réciproque $\mathscr{C}^1$. Alors

- $\varphi_{\lambda,\mu}$ est strictement monotone. Or, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\varphi'_{\lambda,\mu}(x) = e^x - \lambda e^{-x} + \mu.$$

  — Si $\lambda > 0$, alors $\varphi'_{\lambda,\mu}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\varphi'_{\lambda,\mu}(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$, donc $\varphi'_{\lambda,\mu}$ change strictement de signe, donc $\varphi_{\lambda,\mu}$ change strictement de variations. C'est absurde !

— Si $\lambda = 0$, alors $\varphi'_{\lambda,\mu} : x \mapsto e^x + \mu$, qui change strictement de signe dès lors que $\mu < 0$. Donc, nécessairement, $\boxed{\text{si } \lambda = 0,\ \mu \geqslant 0}$.

— Si $\lambda < 0$, écrivons $\lambda = -\xi$, alors on étudie le signe de $\varphi'_{\lambda,\mu}$, en étudiant ses variations. Pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\varphi''_{\lambda,\mu}(x) = e^x + \lambda e^{-x}.$$

Alors on a les équivalences suivantes :

$$\varphi''_{\lambda,\mu}(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant -\lambda e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} \geqslant \xi \Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{2}\ln(\xi).$$

Le minimum de $\varphi'_{\lambda,\mu}$ est donc atteint en $\frac{1}{2}\ln(\xi)$, et il vaut alors

$$\varphi'_{\lambda,\mu}\left(\frac{1}{2}\ln(\xi)\right) = e^{\frac{1}{2}\ln(\xi)} - \lambda e^{-\frac{1}{2}\ln(\xi)} + \mu = \sqrt{\xi} - \frac{1}{\sqrt{\xi}} + \mu = \frac{\xi - 1 + \mu\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}.$$

On étudie alors le polynôme $X^2 + \mu X - 1$: son signe donnera la relation devant être vérifiée entre μ et ξ. Le discriminant du polynôme est $\mu^2 + 4 > 0$, d'où deux racines : $\frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2+4}}{2}$. Donc si $\lambda < 0$, le minimum de $\varphi'_{\lambda,\mu}$ est atteint en un réel positif (ou nul) si et seulement si

$$\sqrt{\xi} \notin \left]\frac{-\mu - \sqrt{\mu^2+4}}{2}, \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2+4}}{2}\right[,$$

mais, comme $\xi > 0$, la condition se réécrit $\sqrt{\xi} \geqslant \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2+4}}{2}$, ou encore $\xi \geqslant \frac{(-\mu + \sqrt{\mu^2+4})^2}{4}$, ou encore

$$\lambda \leqslant -\frac{(-\mu + \sqrt{\mu^2+4})^2}{4}$$

Exercice 15. ●●◐

1. Soit f dérivable en 0. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$. existe et la déterminer (on reviendra à la définition de la dérivabilité en termes de développement limité).

---

f est dérivable en 0 donc on dispose d'une fonction ε tendant vers 0 en 0 et d'un voisinage V de 0 tels que

$$\forall x \in V,\ f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x).$$

Or, pour tout k dans $\{0, \ldots, n\}$, $\frac{k}{n^2} \leqslant \frac{1}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, pour n assez grand, $0, \frac{1}{n^2}, \ldots, \frac{1}{n}$ sont dans V. Donc

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left[f(0) + f'(0)\left(\frac{k}{n^2}\right)\left(1 + \varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)\right)\right]$$

On va supposer ici $f(0) = 0$ (sinon la limite sera infinie). Donc

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f'(0)\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}\left(1+\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)\right).$$

Nommons ε_n le maximum de $|\varepsilon|$ sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$. Afin de manipuler les inégalités, supposons $f'(0) \geqslant 0$. On en déduit que

$$f'(0)\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}(1-\varepsilon_n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leqslant f'(0)\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}(1+\varepsilon_n),$$

i.e.

$$f'(0)\frac{n(n+1)}{2n^2}(1-\varepsilon_n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leqslant f'(0)\frac{n(n+1)}{2n^2}(1+\varepsilon_n),$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit, par encadrement, que $\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ converge vers $\frac{f'(0)}{2}$.

---

2. Application : montrer que $\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

Posons $P_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ et $S_n = \ln(P_n)$. Alors $S_n = \sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$. Donc S_n converge vers la dérivée en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$, i.e. vers $\frac{1}{2}$.

---

3 Théorèmes globaux

3.1 Théorème de Rolle

Exercice 16. ●◐○ Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour toute $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, si f est n fois dérivable sur $[0,1]$ et si f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[0,1]$, alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[0,1]$.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Soit f dérivable n fois sur $[0,1]$, $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ les points d'annulation de f. On montre par récurrence sur $k \leqslant n$ que $f^{(k)}$ s'annule $n+1-k$ fois sur $[0,1]$.
L'initialisation est donnée par l'exercice.
Hérédité. On suppose que $f^{(k)}$ s'annule $n+1-k$ fois sur $[0,1]$ pour un certain $k \leqslant n-1$. Soient $b_0 < \cdots < b_{n-k}$ ces points d'annulation. Alors pour tout i dans $[\![0, n-k-1]\!]$, $f^{(k)}$ est continue

sur $[b_i, b_{i+1}]$, dérivable sur $]b_i, b_{i+1}[$ et $f^{(k)}(b_i) = f^{(k)}(b_{i+1})$ donc, d'après le théorème de Rolle, on dispose de c_i dans $]b_i, b_{i+1}[$ tel que $f^{(k+1)}(c_i)$ s'annule. On a donc trouvé $n+1-(k+1)$ points $b_0 < c_0 < b_1 < \cdots < c_{n-k-1} < b_{n-k}$ d'annulation de $f^{(k+1)}$.
D'où l'hérédité et le résultat par récurrence, en particulier pour $k = n$.

Exercice 17. ●●○
Soit P un polynôme. Montrer que l'équation $P(x) = \mathrm{e}^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions sur $\mathbb{R}$.

Soit n le degré de P. Supposons que $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - P(x)$ s'annule au moins $n+2$ fois sur $\mathbb{R}$. Alors, par l'exercice 16, la dérivée $n+1$-ième de f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$. Or la dérivée $n+1$-ième de P est nulle, donc $x \mapsto \mathrm{e}^x$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$, c'est absurde.
Donc l'équation admet au plus $n+2$ solutions (en particulier c'est un nombre fini).

Exercice 18. ●●○ Soient a et b deux réels, n un entier supérieur ou égal à 2. On considère $P : x \mapsto x^n + ax + b$.

1. Montrer que P s'annule au plus 3 fois sur $\mathbb{R}$.

Posons k le nombre de zéros de P. Alors, comme P est continu donc dérivable sur $\mathbb{R}$, par le théorème de Rolle appliqué entre chacune des racines de P, P' s'annule $k-1$ fois. De même, P'' s'annule $k-2$ fois sur $\mathbb{R}$, i.e. $xn(n-1) \mapsto x^{n-2}$ d'annule $k-2$ fois sur $\mathbb{R}$. Or $x \mapsto x^{n-2}$ s'annule au plus 1 fois sur $\mathbb{R}$, donc $k-2 \leqslant 1$, donc $k \leqslant 3$. D'où le résultat.

---

2. Montrer que si n est pair, P s'annule au plus 2 fois sur $\mathbb{R}$.

Si de plus n est pair, nommons toujours k le nombre de zéros de P. Alors par les mêmes arguments que précédemment, P' s'annule $k-1$ fois sur $\mathbb{R}$, i.e. $x \mapsto nx^{n-1} + a$ s'annule $k-1$ fois sur $\mathbb{R}$. Comme n est pair, $n-1$ est impair donc $x \mapsto nx^{n-1} + a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$. Donc $k-1 \leqslant 1$, donc $k \leqslant 2$.

Exercice 19. ●●○ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dérivable, telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $\exists a > 0, f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un point de la courbe de f, différent de l'origine, où la tangente passe par l'origine du repère.

Traduisons analytiquement la condition géométrique décrite. Soit c dans $\mathbb{R}_+$. L'équation de la tangente à la courbe de f en c est $y = f(c) + f'(c)(x-c)$. Demander à ce que cette droite passe par 0, c'est demander que $0 = f(c) - cf'(c) = c\left(\dfrac{f(c)}{c} - f'(c)\right)$. Cela incite à considérer la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

N.Laillet - W.Ngambou
walter.ngambou@ac-versailles.fr

Or, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 0$, donc g est continue en 0. Donc g est continue sur $[0, a]$, dérivable sur $]0, a[$, et $g(0) = 0$, $g(a) = 0$. Donc d'après le théorème de Rolle, g s'annule en un point c de $]0, a[$. Or,

$$g'(c) = \frac{f'(c)c - f(c)}{c^2},$$

donc $f'(c)x - f(c) = 0$, ce qui correspond exactement à la condition trouvée ! D'où le résultat.

Exercice 20. ●●● Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et bornée.

1. Montrer que si une dérivée $f^{(k)}$ admet un nombre fini de zéros, alors les dérivées précédentes $f^{(p)}$, $1 \leqslant p < k$ tendent vers 0 en $\pm\infty$.
2. Rappeler le théorème de Rolle à l'infini.
3. En déduire que, pour $k \geqslant 2$, $f^{(k)}$ s'annule au moins $k-1$ fois.

3.2 Théorème et inégalité des accroissements finis

Exercice 21. ●○○
Montrer les inégalités suivantes

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)| \leqslant |x - y|$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant x\mathrm{e}^x$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \mathrm{ch}(x) - 1 \leqslant x\mathrm{sh}(x)$

---

1. Soit $f : x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. En particulier, pour tout x de $\mathbb{R}$, $|f'(x)| \leqslant 1$, donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous x et y dans $\mathbb{R}$, $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)| \leqslant |x - y|$.
2. On pose $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit x dans $\mathbb{R}_+^*$. En appliquant le théorème des accroissements finis entre 0 et x, on dispose de c dans $]0, x[$ tel que $\mathrm{e}^x - 1 = f'(c)(x-0) = \mathrm{e}^c x$. Or, $0 \leqslant x \leqslant c$ donc $1 \leqslant \mathrm{e}^c \leqslant \mathrm{e}^x$, donc
$$x \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant x\mathrm{e}^x.$$
3. Soit x un réel positif. La fonction ch est continue sur $[0, x]$, dérivable sur $]0, x[$, de dérivée égale à sh, donc, d'après le théorème des accroissements finis, on dispose de c dans $]0, x[$ tel que
$$\mathrm{ch}(x) - 1 = \mathrm{sh}(c)x.$$
Si $x \geqslant 0$, $0 \leqslant \mathrm{sh}(c) \leqslant \mathrm{sh}(x)$, donc, comme $x \geqslant 0$, $0 \leqslant x\mathrm{sh}(c) \leqslant x\mathrm{sh}(x)$, donc $0 \leqslant \mathrm{ch}(x) - 1 \leqslant x\mathrm{sh}(x)$.
Si $x \leqslant 0$, $x \leqslant \mathrm{sh}(c) \leqslant 0$, donc, comme $x \leqslant 0$, $0 \leqslant x\mathrm{sh}(c) \leqslant x\mathrm{sh}(x)$, donc $0 \leqslant \mathrm{ch}(x) - 1 \leqslant x\mathrm{sh}(x)$.
D'où le résultat.

Exercice 22. *Série harmonique – le retour*. ●○○ En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

En déduire (pour la $n+1$-ième fois) que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$, et déterminer, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Appliquons le théorème des accroissements finis entre x et $x+1$: on dispose de $c_x \in]x, x+1[$ tel que $\ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{c_x}$ (la dérivée de ln en c_x). Or, $x \leqslant c_x \leqslant x+1$ donc $\frac{1}{x+1} \leqslant \frac{1}{c_x} \leqslant \frac{1}{x}$, donc $\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}$. Donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ d'où le résultat !

Exercice 23. ●◐○ Soit f une fonction dérivable d'un segment $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(a) = f(b)$ et que $f'(a) = 0$. Montrer qu'il existe c dans $]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

(comme dans la plupart des démonstrations du cours, on choisira une fonction auxiliaire adéquate)

Ici, on ne peut pas directement appliquer le théorème des accroissements finis ! Considérons la fonction

$$g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ si } x \neq a, \\ 0 \text{ si } x = a. \end{cases}$$

Alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = f'(a) = 0$, donc g est définie et continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et $g(a) = 0$, $g(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$. Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe c dans $]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or, pour tout x dans $]a, b]$,

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - (f(x) - f(a))}{(x-a)^2}.$$

Donc

$$\frac{f'(c)(c-a) - (f(c) - f(a))}{(x-a)^2} = 0,$$

i.e.

$$f'(c)(c-a) = f(c) - f(a),$$

donc, comme $c \neq a$,

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

D'où le résultat.

---

4 Autres exercices

Exercice 24. *Vers de l'analyse un peu fine*. ●●○

Soit f une fonction continûment dérivable de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\begin{cases} f(0)=0, \\ f'(0)=1, \\ f(1)<0. \end{cases}$

On veut montrer qu'il existe un « premier temps de retour à 0 », c'est-à-dire qu'il existe un réel a de $[0,1]$ tel que

$$f(a)=0 \text{ et } \forall 0<x<a,\ f(x)\neq 0.$$

1. Montrer qu'il existe un réel δ tel que $\forall x \in]0,\delta[,\ f(x)>0$.

---

f est dérivable en 0 de dérivée égale à 1, donc on dispose d'une fonction ε définie au voisinage de 0, V, tendant vers 0 en 0, telle que

$$\forall x \in V, f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x) = x(1+\varepsilon(x)).$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, on dispose de $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $x \in]0,\delta_0[$, $|\varepsilon(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. Pour x dans $]0,\delta_0[$, on a alors $1+\varepsilon(x) \geqslant \frac{1}{2}$, donc $x(1+\varepsilon(x)) \geqslant \frac{x}{2} > 0$, i.e. $f(x)>0$.

---

2. Considérons alors l'ensemble $A = \{\delta \in]0,1[, \forall x \in]0,\delta[,\ f(x)>0\}$.

(a) Justifier que A a une borne supérieure, appelons-là a.

L'ensemble A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (il contient δ_0), majorée. Donc A admet une borne supérieure.

(b) Montrer que $f(a)=0$.

Déjà, $f(1)<0$ donc nécessairement $a \neq 1$.
Si $f(a)\neq 0$, supposons $f(a)>0$. f est continue en a donc il on dispose de $\eta>0$ tel que pour tout x de $]a-\eta, a+\eta[$, $f(x)>0$. Donc $a+\frac{\eta}{2} \in A$, c'est absurde. Donc $f(a)=0$.

(c) Montrer que $\forall x \in]0,a[,\ f(x)>0$, et conclure.

Soit $x \in]0,a[$. Posons $\varepsilon = a-x>0$. Alors par les propriétés de la borne supérieure, on dispose d'un élément δ de A tel que $a-\delta<\varepsilon$, i.e. $x<\delta<a$. Donc, par définition de δ, $f(x)>0$.
On en déduit que $f(a)=0$ et que $\forall x \in]0,a[$, $f(x)>0$.

---

 walter.ngambou@ac-versailles.fr

Exercice 25. ●●◐ Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, dérivable. On définit

$$\Phi : \left| \begin{array}{l} [a,b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{et } \Psi : \left| \begin{array}{l} [a,b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} & \text{si } x \neq b \\ f'(b) & \text{si } x = b \end{cases} \end{array} \right.$$

1. En étudiant les fonctions Φ et Ψ, montrer que f' prend toutes les valeurs du segment d'extrémités $f'(a)$ et $f'(b)$.
Ainsi, f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

Premier point, Φ et Ψ sont clairement continues sur $[a,b]$ par définition de la dérivabilité de f.
Ensuite, on peut supposer, sans perte de généralité, $f'(a) < f'(b)$.
On remarque que le point $\tau = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est un point important, car c'est une valeur atteinte par Φ et Ψ. On distingue alors trois cas !

- $f'(a) \leqslant \tau \leqslant f'(b)$: en fonction d'où est M (dans $[f'(a), \tau]$ ou, on peut faire un TVI sur Φ ou Ψ

Soit alors M dans $]f'(a), f'(b)[$ (on peut prendre le segment ouvert car sinon c'est évident !).
On sait que $\Phi(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f'(a) < M$ donc on dispose de $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a, a+\eta]$, $\Phi(x) < M$.
On sait que $\Psi(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} f'(b) > M$ donc on dispose de $\eta' > 0$ tel que $\forall x \in [b-\eta', b]$, $\Psi(x) > M$.
Ensuite, M se situe entre $\Phi(a+\eta)$ et $\Psi(b-\eta')$. De plus, $\Phi(b) = \Psi(a) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Donc, nécessairement, M est ou supérieur ou inférieur à cette quantité, i.e.

- ou bien $\Phi(a+\eta) < M \leqslant \Phi(b)$
- ou bien $\Psi(a) \leqslant M < \Psi(b-\eta)$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que l'on est dans la première situation. Alors par continuité de Φ et par le théorème des valeurs intermédiaires, on dispose de α dans $[a+\eta, b]$ tel que $M = \Phi(\alpha)$, i.e. $M = \dfrac{f(\alpha)-f(a)}{\alpha - a}$. Maintenant, par le théorème des accroissements finis, on dispose de c dans $]a, \alpha[$ tel que $\dfrac{f(\alpha)-f(a)}{\alpha-a} = f'(c)$, i.e. $M = f'(c)$. Le résultat est donc démontré !

---

2. Pourquoi ne peut-on pas appliquer le TVI sur f' ?

Simplement parce que f n'est que dérivable : rien ne nous dit que f' est continue !
