Chapitre 12
Dérivabilité

Chapitre 12
Dérivabilité

1 Dérivabilité

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles non réduits à un point.

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$.

1. On dit que f est dérivable en a si
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
existe et est finie. On dit que cette limite est le nombre dérivé de f en a et on la note $f'(a)$.
2. f est dite dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. Cela permet de définir la fonction dérivée de f, notée $f' : x \mapsto f'(x)$.

Proposition 1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, f dérivable en a. L'équation de la tangente à la courbe de f en a est*
$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Remarque. Au voisinage de a, $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$. On dit que $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ est une « approximation affine » ou « approximation à l'ordre 1 » de f en a.

Comment traduire la propriété précédente ?

Proposition 2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.*

1. *si f est dérivable en a, alors on dispose de $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que*
$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a),$$
et telle que $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
2. *réciproquement, s'il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$ tels que*
$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + k.(x-a) + \varepsilon(x)(x-a)$$
et $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = k$.

Démonstration. **1.** On suppose f dérivable en a.

Brouillon. On veut avoir $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a)$, i.e.
$$\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$$
Il n'y a qu'à poser ce ε !

Définissons

$$\varepsilon : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ si } x \neq a \\ 0 \text{ si } x = a. \end{cases}$$

Alors, comme f est dérivable en a,

$$\begin{cases} \varepsilon(x) \underset{x\to a^- \to 0}{\longrightarrow} \\ \varepsilon(x) \underset{x\to a^+ \to 0}{\longrightarrow} \\ \varepsilon(a) = 0 \end{cases} \text{donc } \varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$

De plus,

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\varepsilon(x)(x-a) = f(a)+f'(a)(x-a)+f(x)-f(a)-f'(a)(x-a) = f(x),$$

d'où l'égalité désirée et le résultat !

2. si l'on dispose de $\varepsilon : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et de $k \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = f(a) + k.(x-a) + \varepsilon(x).(x-a),$$

alors

$$\forall x \in \mathrm{I} \setminus \{a\},\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = k + \varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} k,$$

donc f est dérivable en a et $f'(a) = k$.

$\square$

Proposition 3. *Une fonction dérivable est continue.*

Démonstration. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, dérivable. On dispose de $\varepsilon : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ tel que $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ et

$$\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a),$$

cette dernière quantité tend vers 0 quand x tend vers a, d'où le résultat ! $\square$

Remarque. La réciproque est très fausse !

1. $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en 0,

2. $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ mais pas dérivable en 0 : le démontrer,

3. (HP culturel) la fonction de Weierstrass $W(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$ est continue sur $0 < a < 1$ et dérivable en aucun réel si $ab \geqslant 1$.

Définition 2. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$.

1. On dit que f est dérivable à gauche en a si $\displaystyle\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. On note alors cette limite $f'_g(a)$.

2. On dit que f est dérivable à gauche en a si $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. On note alors cette limite $f'_d(a)$.

Proposition 4. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.*

1. *si f est dérivable à gauche (resp. à droite) en a, alors f est continue à gauche (resp. à droite) en a.*
2. *si f est dérivable à gauche et à droite en a et si $f'_g(a) = f'_d(a)$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.*
3. *réciproquement, si f est dérivable en a, f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_d(a) = f'_g(a) = f'(a)$.*

Exemple 1. **1.** $f : x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0 et $f'_g(0) = -1$, $f'_d(0) = 1$.

2. $E : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est dérivable en tout x de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, de dérivée nulle. Si $x \in \mathbb{Z}$, E est dérivable à droite en x.

1.2 Opérations sur les dérivées

Proposition 5 (Théorèmes généraux)**.** *Soient f, $g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. On suppose f et g dérivables en a.*

1. *pour tous λ et |mu dans $\mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et*
$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$
2. *$f \times g$ est dérivable en a et $(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,*
3. *si g ne s'annule pas sur un voisinage de a, $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g(a)^2}$,*
4. *si g ne s'annule pas sur un voisinage de a, $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Démonstration. **1.**

2.

3. cf. proposition suivante sur les composées.

4. on utilise les deux propositions précédentes.

□

Proposition 6. *Soit $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$, $a \in I$. Si f est dérivable en a, si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ g$ est dérivable en a et*
$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$$
(règle de la chaîne)

Démonstration. **Méthode avec approximation affine.**
Méthode avec taux d'accroissement. En Terminale, certain·e·s d'entre vous ont peut-être vu la preuve :
$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} . \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} g'(f(a)).f'(a)$$
Problème : on ne sait pas si $f(x) \neq f(a)$, donc on ne peut pas, *a priori*, diviser par $f(x) - f(a)$. □

Proposition 7. *Soit $f : I \to J$, continue sur I, bijective, $a \in I$.*

1. *si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.*
2. *si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I, f^{-1} est dérivable sur J et*

$$\forall y \in J,\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Remarque. 1. Que dire des tangentes à $\mathcal{C}_f$ en a et à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ en $f(a)$?
Il s'agit de comparer les fonctions

$$T_1 : x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$$

et

$$T_2 : z \mapsto a + \frac{1}{f'(a)}(z - f(a))$$

On remarque facilement que T_1 et T_2 sont des bijections réciproques. Ainsi, les tangentes sont aussi symétriques par rapport à la première bissectrice !

2. La condition $f'(a) \neq 0$ est importante : si $f'(a) = 0$, f^{-1} n'est pas dérivable, et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ admet une tangente verticale en $f(a)$.

Proposition 8 (Dérivées usuelles)**.** *Il faut connaître les dérivées usuelles du chapitre 4.*

Exercice 1. Dériver $\ln(1 + \text{th}(\sqrt{x})^2)$.

Méthode 1. *Pour montrer qu'une fonction est dérivable sur I, on peut utiliser les « théorèmes généraux » là où il n'y a pas de problème. Pour le reste, on utilise le taux d'accroissement (ou un théorème que l'on verra plus tard, sur la limite de la dérivée).*

Exercice 2. Étudier, pour chacune de ces fonctions...

- sa dérivabilité,
- la continuité de sa dérivée en 0,
- la dérivabilité de sa dérivée en 0.

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ sinon.} \end{cases},\quad g : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ sinon.} \end{cases},\quad h : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ sinon.} \end{cases}$$

L'exercice précédent permet de bien réfléchir à la notion de dérivée d'ordre supérieur.

1.3 Dérivées d'ordres supérieurs

Définition 3. 1. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On définit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition « f est n fois dérivable sur I » et la fonction $f^{(n)}$ par :

(a) f est 0 fois dérivable sur I par définition. On note $f^{(0)} = f$.

(b) Pour tout n entier, si f est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est dérivable, alors f est $n+1$ fois dérivable et on note $f^{(n+1)} = (f^n)'$.

2. Si $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{D}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ comme l'ensemble des fonctions n fois dérivables de ß dans $\mathbb{R}$. En particulier, $\mathcal{D}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathrm{I}}$.

3. Si $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I, de dérivée n-ième continue. En particulier, $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

4. On définit l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables, noté $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, par

$$\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R}).$$

5. Si $f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R})/\mathcal{D}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R})/\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, on dit que f est « de classe $\mathscr{C}^n/\mathcal{D}^n/\mathscr{C}^\infty$ ».

Remarque. **1.** On a les inclusions (infinies)

$$\mathcal{D}^0 \supset \mathscr{C}^0 \supset \mathcal{D}^1 \supset \mathscr{C}^1 \supset \cdots \supset \mathscr{C}^\infty.$$

2. **TOUTES** ces inclusions sont strictes. Cf. exemple de la section précédente : f est continue, pas $\mathcal{D}^1$, g est $\mathcal{D}^1$, pas $\mathscr{C}^1$, h est $\mathscr{C}^1$, pas $\mathcal{D}^2$. De manière générale,

$$f_k : x \mapsto \begin{cases} x^{2k+1} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^k$ mais pas $\mathcal{D}^{k+1}$, et

$$g_k : x \mapsto \begin{cases} x^{2k} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{D}^k$ mais pas $\mathscr{C}^k$.

Exemple 2. Quelques exemples importants de calculs de dérivées n-ièmes :

1. $\exp \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \exp^{(n)} = \exp$,

2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} \in \mathscr{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \neq 0,\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

3. sin et cos sont dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \text{ et } \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

4. Si $m \in \mathbb{N}$, $P_m : x \mapsto x^m$ est dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}$,

- si $k \geqslant m+1$, $P_m^{(k)}(x) = 0$,
- si $0 \leqslant k \leqslant m$, $P_m^{(k)}(x) = \dfrac{m!}{(m-k)!} x^{m-k}$.

Proposition 9 (Dérivée n-ième d'une somme, d'un produit)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f et g deux fonctions de $\mathscr{D}^n(I)$, λ et μ deux réels. Alors*

(i) *$\lambda f + \mu g$ est n fois dérivable sur I, de dérivée n-ième $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.*

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

(ii) *(règle de Leibniz) fg est n fois dérivable sur I de dérivée n-ième*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

(iii) *si f est à valeurs dans J et si h est n fois dérivable sur J, $h \circ f$ est n fois dérivable sur I.*

(iv) *si f est à valeurs dans J, bijective, si f est n fois dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est n fois dérivable sur J.*

Remarque. Il existe une formule (moche) de la dérivée n-ième d'une composée, appelée formule de Faà di Bruno, complètement inutile en pratique en prépa.

Démonstration. On ne prouve que la formule de Leibniz.
Soit $f, g \in \mathbb{R}^{\mathrm{I}}$. On montre par récurrence la proposition

$$\text{si } (f,g) \in \mathcal{D}^n(\mathrm{I},\mathbb{R})^2, \text{ alors } f \times g \in \mathcal{D}^n(\mathrm{I},\mathbb{R}) \text{ et } (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}. \qquad (\mathcal{P}_n)$$

Initialisation. $f \times g$ est toujours 0 fois dérivable, et

$$(f \times g)^{(0)} = f \times g = \binom{0}{0} f^{(0)} g^{(0)}.$$

Hérédité. On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain n.
On suppose f et g $n+1$ fois dérivables. Alors f et g sont n fois dérivables, donc, par hypothèse de récurrence, $f \times g$ est n fois dérivable et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. $k \leqslant n$ donc $f^{(k)}$ est dérivable car f est n fois dérivable.
$n - k \leqslant n$ donc $g^{(n-k)}$ est dérivable car g est $n+1$ fois dérivable.
Donc, par produit et somme, $(fg)^{(n)}$ est dérivable, i.e. fg est $n+1$ fois dérivable, et

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \left((fg)^{(n)}\right)' \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right) \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)}}_{A} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}}_{B}.
\end{aligned}$$

Brouillon. Là, on va éviter d'utiliser la technique vue au chapitre 2 (où on utilise des coefficients binomiaux $\binom{n}{-1}$) afin de ne pas écrire de dérivée négative.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Dans la somme A, on pose $\ell = k+1$. Ainsi,

$$A = \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} f^{(\ell)} g^{(n+1-\ell)} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.$$

Ainsi, en regroupant A et B, en enlevant le terme en $k = n+1$ pour A et en $k = 0$ pour B,

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= f^{(0)} g^{(n+1)} + f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \text{ par la formule de Pascal} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)},
\end{aligned}$$

d'où l'hérédité et le résultat ! □

Exercice 3. **1.** Soit $f : x \mapsto x^{n-1} \ln(x)$. Calculer $f^{(n)}$.

2. Soit $m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$, $g : x \mapsto (x-a)^m f(x)$. Démontrer que

$$\forall k \in [\![0, m-1]\!],\ g^{(k)}(a) = 0.$$

2 Théorèmes liés à la dérivation

2.1 Dérivabilité et extremum local

Définition 4. Soit f une fonction définie sur I, a un point de I.

(i) f atteint un maximum (resp un minimum) local en a s'il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I$, $f(x) \leqslant f(a)$ (resp $f(x) \geqslant f(a)$).

(ii) a est un point critique de f si f est dérivable en a et $f'(a) = 0$.

Remarque. **1.** Tout minimum (resp. maximum) de f est un minimum local (resp. maximum local). La réciproque est fausse !

2. Ce n'est pas parce que f admet un minimum local en a que f est décroissante, puis croissante au voisinage de a ! Contre-exemple : $f : x \mapsto x \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|$. 0 est un minimum local de f mais f n'arrête pas d'osciller au voisinage de 0.

Théorème 1 (Condition **nécessaire** d'extremum local)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, a un point* **intérieur** *de I. Pour que f admette un extremum local en a, il* **faut** *que a soit un point critique, i.e. que $f'(a) = 0$.*

Remarque. **1.** La propriété n'est pas vraie sur un point non intérieur : par exemple, $f : x \mapsto x$ sur $[1, 2]$. f atteint un minimum (global) en 1, un maximum (global) en 2 mais f' ne s'annule jamais.

2. Ce n'est qu'une condition nécessaire, et surtout pas suffisante, d'extremum local ! Par exemple, si $g : x \mapsto x^3$, $g'(0) = 0$ mais g n'admet pas d'extremum local en 0.

Démonstration. On suppose que f atteint un maximum local en a. Alors on dispose de $\eta > 0$ tel que $\forall x \in \mathrm{I} \cap [a-\eta, a+\eta]$, $f(x) \leqslant f(a)$.
Comme a est intérieur à I, on peut, quitte à réduire η, supposer que $[a-\eta, a+\eta] \subset \mathrm{I}$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

- soit $x \in [a-\eta, a[$. Alors $f(x)-f(a) \leqslant 0$ et $x-a<0$ donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$ donc, comme f est dérivable en a,
$$f'(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0,$$
par passage à la limite dans les inégalités larges.
- soit $x \in]a, a+\eta]$. Alors $f(x)-f(a) \leqslant 0$ et $x-a>0$ donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$ donc, comme f est dérivable en a,
$$f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0,$$
par passage à la limite dans les inégalités larges.

Donc $f'(a) = 0$. □

Dans toute la suite section, a et b sont deux réels tels que $a<b$.

2.2 Théorème de Rolle

Théorème 2. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, telle que $f(a)=f(b)$. Alors il existe un réel c de $]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.*

Remarque. **1.** Il n'y a pas unicité des points en lequels f' s'annule !

2. Une manière synthétique d'énoncer le résultat est « entre deux zéros de la fonction se situe au moins un zéro de la dérivée » .

3. Attention aux hypothèses ! On va trouver un contre-exemple au théorème à chaque fois que l'on enlève une hypothèse.

- si l'on enlève la continuité « f continue sur $[a,b]$ » , alors en prenant par exemple
$$f : x \mapsto \begin{cases} x \text{ si } x \in [0,1[\\ 0 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$
alors $f(0)=f(1)$, f est dérivable sur $]0,1[$ mais f' ne s'annule pas sur $]0,1[$
- si l'on enlève l'hypothèse de dérivabilité, $x \mapsto |x|$ sur $[-1,1]$ vérifie les deux autres hypothèses mais n'a pas de point critique (son minimum global est le point où elle n'est pas dérivable)
- si l'on enlève l'hypothèse $f(a)=f(b)$, $x \mapsto x$ sur $[0,1]$ vérifie les deux autres hypothèses mais sa dérivée ne s'annule jamais sur $[0,1]$.

Démonstration. **(1)** f est **continue** sur le **segment** $[a,b]$ donc elle est bornée et atteint son maximum M et son minimum m sur $[a,b]$.

(2) si m et M sont atteints aux bornes a et b, comme $f(a)=f(b)$, $m=M$, ce qui signifie que f est constante sur $[a,b]$. Donc f' est nulle sur $]a,b[$ et $\forall c \in [a,b]$, $f'(c)=0$.

(3) sinon, m ou M est atteint en un point c **intérieur**, i.e. $c \in]a,b[$. Par condition nécessaire d'extremum local, $f'(c)=0$.

□

Exemple 3 (Exemple important). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathscr{C}^\infty$ tel qu'il existe $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ $n+1$ réels tels que $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $f(a_i)=0$. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

Brouillon. L'idée est d'utiliser déjà le théorème de Rolle une première fois : il nous donne $b_0 \in]a_0, a_1[$, $b_1 \in]a_1, a_2[$, etc. tels que f' s'annule. Puis on réapplique ce théorème à f' et ainsi de suite... une récurrence s'impose !

Démontrons par récurrence que pour tout k dans $[\![0, n]\!]$,

$$f^{(k)} \text{ s'annule au moins } n+1-k \text{ fois.} \tag{$\mathcal{P}_k$}$$

Initialisation. Par hypothèse, $f^{(0)}$ s'annule au moins $n+1$ fois.
Hérédité. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\mathcal{P}_k$ est vraie. Alors $f^{(k)}$ s'annule en $n+1-k$ points $\alpha_0 < \cdots < \alpha_{n-k}$.
Soit $i \in [\![0, n-k-1]\!]$. Alors $f^{(k)}$ est continue sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, dérivable sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$, $f(\alpha_i) = f(\alpha_{i+1})$ donc, d'après le théorème de Rolle, on dispose de $\beta_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tel que $f^{(k+1)}(\beta_i) = 0$.
On a donc $n-k = n+1-(k+1)$ points $(\beta_0, \ldots, \beta_{n-k-1})$ vérifiant

$$\alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \cdots < \beta_{n-k-1} < \alpha_{n-k}$$

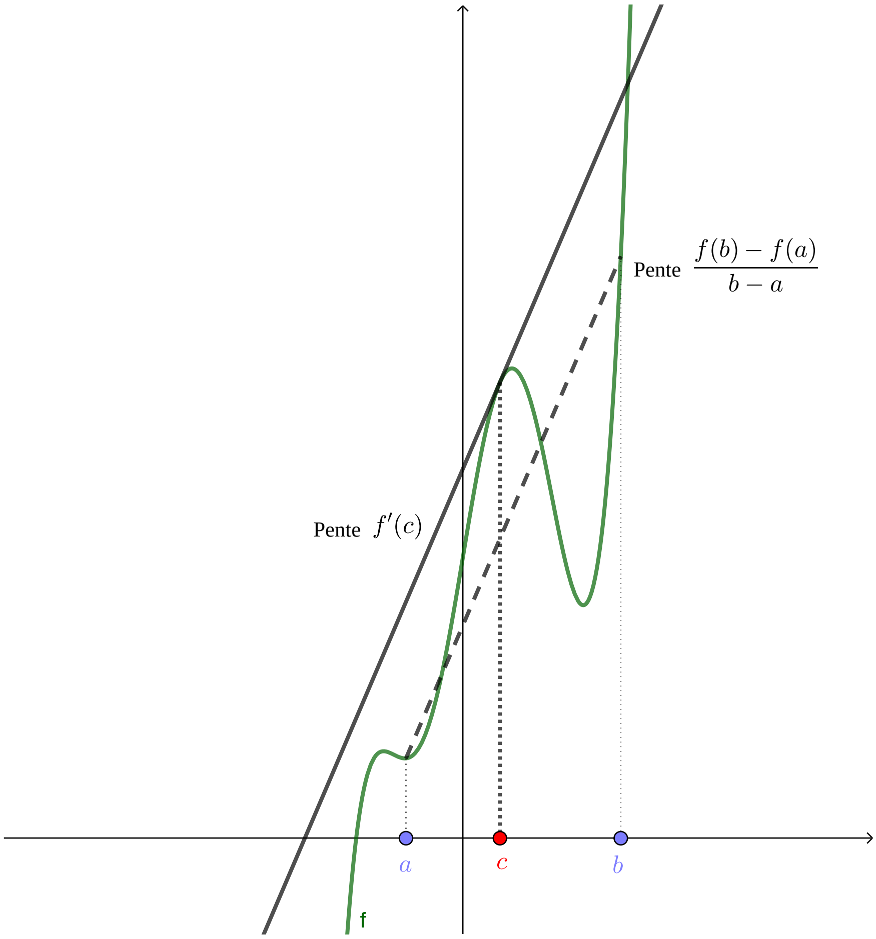
i.e. $n+1-(k+1)$ points **distincts** en lesquels $f^{(k+1)}$ s'annule. D'où l'hérédité et le résultat !
En particulier, $\mathcal{P}_n$ est vraie et donc $f^{(n)}$ s'annule en au moins un point.

2.3 Théorème des accroissement finis

Théorème 3 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe c dans $]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Remarque. **1.** Il faut pouvoir illustrer ce théorème



2. Le théorème de Rolle est un cas particulier du TAF.
3. Le TAF dit que « si la vitesse moyenne au cours d'un trajet de de v_m, alors il existe un temps auquel la vitesse instantanée est égale à v_m »
4. Ce théorème peut se démontrer, avec des hypothèses plus fortes, à l'aide d'intégrales (cf. chapitre futur sur l'intégration).

Démonstration. Une idée est de se ramener au théorème de Rolle (*Idée importante, utile dans plusieurs situations !*).
On va donc retirer une quantité de sorte que $f(a) = f(b)$.
Posons

$$g : \begin{cases} [a, b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \end{cases}$$

Alors g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ par les théorèmes généraux et

- $g(a) = f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0,$
- $g(b) = f(b) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a).$

Donc $g(a) = g(b)$ donc, d'après le théorème de Rolle, on dispose de $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, i.e. tel que

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

i.e. tel que $f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$. □

Exemple 4. Déterminons la limite, quand $x \to +\infty$, de $x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$.

Posons $f : t \mapsto e^{\frac{1}{t}}$. Soit x dans $\mathbb{R}_+^*$. f est continue sur $[x, x+1]$, dérivable sur $]x, x+1[$, donc on dispose de $c_x \in]x, x+1[$ tel que

$$f'(c_x) = \frac{e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}}{x + 1 - x},$$

i.e.

$$e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}} = f'(c_x) = e^{\frac{1}{c_x}} \times \frac{-1}{c_x^2}.$$

Donc

$$x^2 \left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{x^2}{c_x^2} e^{\frac{1}{c_x}}.$$

Or, $c_x \geqslant x$ donc $c_x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $e^{\frac{1}{c_x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

De plus, $x < c_x < x + 1$ donc $\frac{c_x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ par encadrement, donc, par composition de limites,

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}\right) = 1.$$

2.4 Corollaires du TAF

2.4.1 Inégalité des accroissements finis

Proposition 10 (Inégalités des accroissements finis)**.** *Soit I intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable. Si $|f'|$ est majorée par $M > 0$ sur I, alors*

$$\forall (x, y \in I^2, \ |f(y) - f(x)| \leqslant M.|y - x|$$

Démonstration. Soit $(x, y) \in \mathrm{I}^2$, $x < y$. f est continue sur $[x, y]$, dérivable sur $]x, y[$, donc, par l'égalité des accroissements finis, il existe c dans $]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Alors

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)|.|y - x| \leqslant M.|y - x|.$$

□

Exemple 5. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $|\mathrm{Arctan}(x)| \leqslant |x|$.

On sait que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $|\mathrm{Arctan}'(x)| = \frac{1}{1 + x^2} \leqslant 1$.

Donc, par l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(0)| \leqslant |x - 0|,$$

i.e. $|\mathrm{Arctan}(x)| \leqslant |x|$.

En fait, l'inégalité des accroissements finis permet de manipuler une notion importante, celle de fonctions lipschitzienes.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Définition 5. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$.

1. Soit $k > 0$. On dit que f est k-lipschitzienne si

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant k|y - x|.$$

2. On dit que f est lipschitzienne s'il existe $k > 0$ tel que f est k-lipschitzienne.
3. On dit que f est contractante s'il existe $k \in]0, 1[$ tel que f est k-lipschitzienne.

Proposition 11. **1.** *Toute fonction lipschitzienne est continue.*

2. *Toute fonction dérivable de dérivée majorée est lipschitzienne.*
3. *Toute fonction $\mathscr{C}^1$ sur un segment est lipschitzienne.*

Démonstration. **1.** Évident.

2. C'est l'IAF.
3. C'est le théorème des bornes atteintes + l'IAF.

□

Remarque. Attention, une fonction peut être lipschitzienne sanas être dérivable : $x \mapsto |x|$ est 1-lipschitzienne sans être dérivable sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Montrer que $x \mapsto x^2$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

2.4.2 Dérivée et sens de variations

Proposition 12. *Soit I intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable.*

1. *Si f est croissante sur I, alors $\forall x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.*
2. *Si f est décroissante sur I, alors $\forall x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.*
3. *Si f est constante sur I, alors $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$.*

Démonstration. **1.** Soit $a \in \mathrm{I}$. Soit $x \in \mathrm{I}$, $x \neq a$.

- si $x < a$, alors $f(x) \leqslant f(a)$ donc $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$,
- si $x > a$, alors $f(x) \geqslant f(a)$ donc $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$.

Don pour tout x dans $\mathrm{I} \setminus \{a\}$, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$, donc, par passage à la limite dans les inégalités **larges**, $f'(a) \geqslant 0$.

2. On adapte.
3. On adapte.

□

Remarque. La stricte croissance n'implique pas la stricte positivité de la dérivée. Cf. $x \mapsto x^3$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais de dérivée nulle en 0.
Ceci est dû au fait que l'on fait un passage à la limite dans les inégalités, et que les inégalités strictes ne sont pas préservées par passage à la limite.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 13. *Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.*

$$\text{Si } \begin{cases} \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0 \\ \forall x \in I,\ f'(x) > 0 \\ \forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0 \\ \forall x \in I,\ f'(x) < 0 \\ \forall x \in I,\ f'(x) = 0 \end{cases}, \text{ alors } f \text{ est } \begin{cases} \text{croissante} \\ \text{strictement croissante} \\ \text{décroissante} \\ \text{strictement décroissante} \\ \text{constante} \end{cases} \text{ sur } I.$$

Démonstration. C'est la démonstration qui a besoin du TAF !
Si $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) \geqslant 0$.
Soit $(x, y) \in \mathrm{I}^2$ tels que $x \leqslant y$.
Si $x = y$, $f(x) = f(y)$ et c'est gagné.
Sinon, f est continue sur $[x, y]$, dérivable sur $]x, y[$, donc, d'après le théorème des accroissements finis, on dispose de $c \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Or, $y - x > 0$, $f'(c) \geqslant 0$ par hypothèse, donc $f(y) - f(x) \geqslant 0$, i.e. $f(x) \leqslant f(y)$.
Donc f est croissante sur I. □

Remarque. On a besoin que I soit un intervalle.

- si $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) < 0$. Mais f n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$: $-1 < 1$ mais $\dfrac{1}{-1} < \dfrac{1}{1}$.
- si $g : x \mapsto \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\dfrac{1}{x}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) = 0$ mais g n'est paas constante. Elle l'est sur $\mathbb{R}_+^*$ (égale à $\dfrac{\pi}{2}$) et sur $\mathbb{R}_-^*$ (égale à $-\dfrac{\pi}{2}$)

2.4.3 Théorème de la limite de la dérivée

On a souvent eu envie de dire des choses comme « $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 car $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ tend vers $+\infty$ en 0 » . À quel point est-ce vrai ?

Proposition 14. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle, $a \in I$, f continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$.
Si $f'(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \in \overline{R}$, alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{I} \setminus \{a\}$.
Par le TAF entre a et x, comme f est continue sur $[a, x]$ (ou $[x, a]$ si $x < a$) et dérivable sur $]a, x[$ (ou $]x, a[$ si $x < a$), on dispose de c_x entre a et x tel que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Comme c_x est entre x et a, $c_x \underset{x \to a}{\longrightarrow} a$ par encadrement.
Comme $f(y) \underset{y \to a}{\longrightarrow} \ell$, par composition de limites, $f'(c_x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$, i.e.

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

□

Remarque. **1.** Le théorème permet de prouver qu'une fonciton est dérivable en un point en étudiant la limite de sa dérivée.

2. Il permet aussi de montrer qu'une fonction n'est pas dérivable en un point (si $\ell = +\infty$). Ainsi, $f : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

3. si f' n'a pas de limite en 0, on ne peut rien dire !
Si

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right. \text{ et } g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

f' et g' n'ont pas de limite en 0 mais g n'est pas dérivable en 0 alors que g l'est.

Proposition 15 (Théorèmes de prolongement $\mathscr{C}^1/\mathscr{C}^k/\mathscr{C}^\infty$)**.** *Soit I intervalle, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$, continue.*

1. *Si f est $\mathscr{C}^1$ sur $I \backslash \{a\}$ et si f' possède une limite finie ℓ en a, alors f est $\mathscr{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.*

2. *Si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$, si*

$$\forall i \in [\![1, k]\!]\ \exists \ell_i \in \mathbb{R},\ f^{(i)}(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_i,$$

alors f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et

$$\forall i \in [\![1, k]\!],\ f^{(i)}(a) = \ell_i.$$

3. *Si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I \setminus \{a\}$, si*

$$\forall i \in \mathbb{N}^*\ \exists \ell_i \in \mathbb{R},\ f^{(i)}(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_i,$$

alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ f^{(i)}(a) = \ell_i.$$

Exemple 6 (Ultra-classique !). Soit $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$. Démontrons que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déjà, $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Ensuite, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ par les théorèmes généraux.

3. Étudions les limites des dérivées k-ièmes de f en 0.
Brouillon. On calcule $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$, $f''(x) = -\dfrac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$, etc. On remarque qu'en fait $f^{(k)}(x)$ s'écrit comme le produit d'un polynôme et de $e^{-\frac{1}{x}}$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Démontrons, pour tout k dans $\mathbb{N}$,

$$\exists P_k \text{ polynôme tel que } \forall x > 0,\ f^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}. \tag{$\mathcal{Q}_k$}$$

L'**initialisation** est évidente en posant $P_0 = 1$.
Pour l'**hérédité**, soit k dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{Q}_k$ est vraie. Alors on dispose de P_k polynôme tel que

$$\forall x > 0,\ f^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.$$

En dérivant,

$$f^{(k+1)}(x) = -\frac{1}{x^2}P_k'\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + P_k\left(\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}},$$

en posant $P_{k+1} : y \mapsto -y^2P_k'(y) + y^2P_k(y)$.
D'où la définition de la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par récurrence.

4. Soit alors $k \in \mathbb{N}$. Alors
   - $\forall x < 0,\ f^{(k)}(x) = 0 \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0$,
   - $\forall x > 0,\ f^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

   Donc $f^{(k)}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
5. Donc, par théorème de prolongement $\mathscr{C}^\infty$, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(0) = 0$.

3 Brève extension au monde complexe

Définition 6. Soit $f : \mathrm{I} \to C$. f est dérivable en a ssi $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ le sont, et sa dérivée est

$$f'(a) = \mathfrak{Re}(f)'(a) + i\mathfrak{Im}(f)'(a).$$

Proposition 16. *Soit $f : I \to C$, $a \in I$.*

1. *f est dérivable en a ssi $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie en a. Cette limite finie est alors $f'(a)$.*
2. *f est dérivable en a ssi il existe $k \in \mathbb{C}$, $\varepsilon : I \to \mathbb{C}$ telle que $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, et que*

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + k(x - a) + \varepsilon(x).(x - a).$$

   Dans ce cas $k = f'(a)$.

Proposition 17. *Tous les résultats de la première section sont valables pour des fonctions à valeurs complexes.*

Exemple 7. Ainsi, $x \mapsto \mathrm{e}^{ix^2}$ est dérivable, de dérivée $x \mapsto 2ix\mathrm{e}^{ix^2}$.

Remarque. **ATTENTION !** Presque aucun résultat de la deuxième section ne fonctionne !

1. Tout ce qui a trait aux extremums ou aux variations n'a pas de sens.

2. Les théorèmes de Rolle et des accroissements finis sont faux en général ! Si $f : x \mapsto e^{ix}$, alors $f(0) = f(2\pi)$ mais, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f'(x) = ie^{ix}$, qui ne s'annule jamais !

En revanche, on a la

Proposition 18 (Inégalité des acfroissements finis)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{C}$, I intervalle. Si f est $\mathscr{C}^1$ sur I et qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leqslant M$, alors $\forall (x, y) \in I^2$,*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M.|x - y|.$$

Démonstration. Cette propriété sera démontrée dans le chapitre sur l'intégration ! □

4 Convexité

4.1 Définitions de base

4.1.1 Moyenne de deux points et droites

On commence par une remarque toute simple, mais importante.

Proposition 19. *Soient x et y deux réels tels que $x < y$.*

1. *Pour tout λ dans $[0, 1]$, $(1 - \lambda)x + \lambda y$ appartient au segment $[x, y]$.*
2. *Pour tout z dans $[x, y]$, il existe un unique λ dans $[0, 1]$ tel que $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$.*

Définition 7. On dit que z est combinaison convexe de x et y.

Remarque. Il faut comprendre $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$ comme une moyenne pondérée de x et de y. Plus $1 - \lambda$ est proche de 1, plus le point z est proche de x.

Proposition 20. *Soit f une fonction affine. Alors pour tous réels $x < y$, pour tout λ dans $[0, 1]$,*

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Exercice 5. Démontrer que la propriété précédente caractérise les fonctions affines. Plus précisément, on prend f vérifiant :

$$\forall \lambda \in [0, 1],\ f((1 - \lambda)x + \lambda y) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

1. démontrer que pour tous a, b, c tels que $a < c < b$,
$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$
2. en déduire que pour tous x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = f(0) + x(f(1) - f(0))$ et conclure.

4.1.2 Définition de la convexité

Définition 8. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur I si

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2,\ \forall \lambda \in [0, 1],\ f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leqslant (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Une fonction f est concave sur I si

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2,\ \forall \lambda \in [0, 1],\ f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geqslant (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Remarque. On peut rajouter sans aucun problème la condition $x < y$.

Il faut tout de suite pouvoir interpréter graphiquement cette propriété

Proposition 21. *Une fonction est convexe (respectivement concave) si et seulement si son graphe est toujours en-dessous (respectivement au-dessus) de ses cordes.*

Démonstration. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. Notons, si $a < b$, $g_{a,b}$ la fonction affine passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ (sur le segment $[a, b]$, la courbe représentative de cette fonction est la corde !)
Alors on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} f \text{ est convexe } &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) \leqslant (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) \\ &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) \leqslant (1-\lambda) g_{x,y}(x) + \lambda g_{x,y}(y) \\ &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) \leqslant g_{x,y}\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) \text{ par la prop 20} \\ &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y,\ \forall z \in [x,y],\ f(z) \leqslant g_{x,y}(z) \text{ par la proposition 19,} \end{aligned}$$

cette dernière proposition signifiant exactement que « f est en-dessous de sa corde » ! □

On a un peu mieux :

Proposition 22. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Le graphe de f est au-dessus de ses sécantes dans la zone extérieure à la corde !*

Démonstration. Il s'agit de démontrer que si $a < b$, alors pour tout $x \geqslant b$ ou $x \leqslant a$, $f(x) \geqslant g_{a,b}(x)$.
Soit $x \geqslant b$ (on fait de même si $x \leqslant a$).
L'inégalité à démontrer est donc

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \leqslant f(x),$$

i.e.

$$f(b)(b-a) + f(a)(x-b) \leqslant f(x)(x-a),$$

ou encore

$$f(b)(b-a) \leqslant f(x)(x-a) + f(a)(b-x),$$

i.e.

$$f(b) \leqslant \frac{x-a}{b-a} f(x) + \frac{b-x}{b-a} f(a),$$

ce qui est exactement une inégalité de convexité ! (b est bien moyenne de a et x) □

Une conséquence immédiate et **fondamentale** de la convexité est l'inégalité de Jensen.

Proposition 23. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors pour tous $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$, pour tous $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [0,1]^n$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$,*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Si f est concave, on inverse l'inégalité.

Démonstration. On fait une preuve par récurrence. Le cas $n = 2$ est juste la définition de la convexité.
Pour l'hérédité, si l'on prend $n+1$ réels $x_1, \dots, x_{n+1}$ et $n+1$ réels $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$, alors on remarque que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}.$$

On suppose, sans perte de généralité, que $\Lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n > 0$ (sinon la propriété est évidente !)
Alors

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} = \Lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\Lambda} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}.$$

Ainsi, par convexité de f, et comme $\Lambda + \lambda_{n+1} = 1$,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\Lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\Lambda} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &\leqslant \Lambda f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\Lambda} x_i\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Mais $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\Lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{\Lambda} = \frac{\Lambda}{\Lambda} = 1$, donc, par hypothèse de récurrence,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\Lambda} x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\Lambda} f(x_i).$$

Ainsi,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \Lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\Lambda} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

□

Exemple 8. On admet ici que le logarithme est une fonction concave. On obtient alors immédiatement l'inégalité arithmético-géométrique et ses généralisation : pour tous a, b positifs,

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2},$$

et, pour tous $x_1, \dots, x_n$ positifs,

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Ces inégalités sont des conséquences de l'inégalité de Jensen en prenant $f = \ln$, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$.
Creusons tout de même le point de vue géométrique de la convexité, en s'intéressant de plus près aux cordes du graphe d'une fonction convexe.

Proposition 24 (Inégalité des pentes)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$.*
Alors f est convexe si et seulement si pour tous réels (a, b, c) de I tels que $a < c < b$,

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Correction 1. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, $x \in \mathbb{R}$. Alors l'application « pente issue de x » ,

$$\tau_x : \left| \begin{array}{rcl} \mathrm{I} \setminus \{x\} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \end{array} \right.$$

est croissante.

Démonstration. **1. Preuve de l'inégalité des pentes.** Il s'agit d'utiliser intelligemment le fait d'être sous la corde **et de faire un dessin** !

$\boxed{\Rightarrow}$
- Notons $g_{a,b}$ la fonction affine valant $f(a)$ en a et $f(b)$ en b.
- Écrivons c comme combinaison convexe de a et de b :

$$c = a + \frac{c-a}{b-a}(b-a) = a - \frac{c-a}{b-a}a + \frac{c-a}{b-a}b = \frac{b-c}{b-a}a + \frac{c-a}{b-a}b.$$

Cela n'est pas utile d'apprendre par cœur cette formule...

Mais alors par convexité de f,

$$f(c) \leqslant \frac{b-c}{b-a}f(a) + \frac{c-a}{b-a}f(b) = \frac{b-c}{b-a}g_{a,b}(a) + \frac{c-a}{b-a}g_{a,b}(b) = g_{a,b}(c).$$

Ainsi,

$$\frac{f(c) - f(a)}{c-a} \leqslant \frac{g_{a,b}(c) - g_{a,b}(a)}{c-a} = \frac{g_{a,b}(b) - g_{a,b}(a)}{b-a} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a},$$

l'égalité $\dfrac{g_{a,b}(c) - g_{a,b}(a)}{c-a} = \dfrac{g_{a,b}(b) - g_{a,b}(a)}{b-a}$ venant du fait que, pour une fonction affine, la pente est toujours la même !

De même,

$$\frac{f(b) - f(c)}{b-c} \geqslant \frac{g_{a,b}(b) - g_{a,b}(c)}{b-c} = \frac{g_{a,b}(b) - g_{a,b}(a)}{b-a} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

D'où l'inégalité désirée !

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement,

2. La croissance des pentes est alors immédiate : soit $x \in \mathrm{I}$, $y < z$ deux éléments de I. Alors :
- si $x < y < z$, on a vu que $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}$, i.e. $\tau_x(y) \leqslant \tau_x(z)$.
- on adapte dans les autres cas...

$\square$

Exemple 9. Une jolie application de ce résultat : si f est convexe sur I, alors tout minimum local de f est un minimum global : le minimum local en a assure que τ_a est positive au voisinage à droite de a, négative au voisinage à gauche. La croissance des pentes permet d'étendre le résultat.

4.2 Convexité et dérivabilité

La croissance des pentes permet d'établir un résultat très puissant ! Toute fonction convexe est « presque » dérivable (mais, en tout cas, elle est continue !)

Proposition 25. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, convexe. Alors f admet des dérivées à gauche et à droite en tout point intérieur à I. En particulier, elle y est continue.*

Démonstration. Soit a intérieur à I. Comme τ_a est croissante, elle admet une limite à gauche et à droite en a. Ces limites ne sont pas infinies car τ_a est définie à gauche et à droite de a (et donc τ_a ne peut tendre vers $-\infty$ en a^+ par exemple. Donc le taux d'accroissement de f en a admet des limites finies à gauche et à droite, ce qui correspond exactement à la dérivabilité à gauche et à droite de f en a. □

Remarque. **ATTENTION !** Ceci n'est valable que si I est un intervalle **ouvert**. On peut facilement trouver un contre-exemple sur un fermé.

Proposition 26. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable. Les ASSE*

1. *f est convexe*
2. *f' croît (et, donc, si f est $\mathscr{C}^2$, $f'' \geqslant 0$)*
3. *f est au-dessus de ses tangentes*

Démonstration. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Soient $x, y \in I$ avec $x < y$. Pour tout $t \in]x, y[$, l'inégalité des pentes donne

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \text{ et } \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(y) - f(t)}{y - t}.$$

En faisant tendre t vers x à gauche et vers y à droite, $f'(x) \leqslant \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant f'(y)$. , d'où la croissance.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Soit $a \in I$. Étudions alors la différence ϕ entre f et sa tangente :

$$\varphi : t \mapsto f(t) - f'(a)(t - a) - f(a)$$

φ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$: $\varphi'(x) = f'(x) - f'(a)$. Par croissance de f', φ' est négative à gauche de a et positive à droite. Ainsi, φ est décroissante à gauche de a et croissante à droite, donc positive sur I tout entier puisque $\varphi(a) = 0$.
(iii) $\Longrightarrow$ (i) Soient $x, y \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$. Posons $a = (1 - \lambda)x + \lambda y$. Pour tout $t \in I$: $f(t) \geqslant f'(a)(t - a) + f(a)$, donc :

$$\begin{aligned}(1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) &\geqslant (1 - \lambda)\left(f'(a)(x - a) + f(a)\right) + \lambda\left(f'(a)(y - a) + f(a)\right) \\ &= f'(a)((1 - \lambda)x + \lambda y - a) + f(a) = f((1 - \lambda)x + \lambda y).\end{aligned}$$

D'où la convexité □

Exercice 6. Quelles peuvent être les limites d'une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ en $\pm\infty$?

Exemple 10. Retrouvons des inégalités célèbres à l'aide de la convexité !

Définition 9. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$. On dit que a est un point d'inflexion de f si f est localement concave puis convexe. Si $f \in \mathcal{D}^2$, il s'agit d'un zéro de f'' avec changement de signe.

 N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 27 (Stricte convexité)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est strictement convexe sur I, i.e.*

$$\forall x < y \in I,\ \forall \lambda \in]0,1[,\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

2. *pour tous $a < c < b$,*

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

3. *f' est strictement croissante.*

Démonstration. On a simplement (i)$\Leftrightarrow$(ii) en reprenant exactement la preuve de l'inégalité des pentes et en se rendant compte que toutes les inégalités strictes fonctionnent bien !
(i)$\Rightarrow$(iii) Si f est strictement convexe, alors f est convexe, donc f' croît. Si f' ne croît pas strictement, alors on dispose de $\alpha < \beta$ tels que $f'(\alpha) = f'(\beta)$. Mais, comme f' croît, f' est constante sur $[\alpha, \beta]$. Donc f est affine sur $[\alpha, \beta]$, ce qui contredit la stricte convexité de f !
(iii)$\Rightarrow$(i) Si f' croît strictement, $x < y$, $\lambda \in]0,1[$. Notons $a = x$, $b = y$ et $c = \lambda x + (1-\lambda)y$. Alors $a < c < b$. Par le TAF entre a et c et entre c et b, il existe α tel que

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} = f'(\alpha) \text{ et } \frac{f(b)-f(c)}{b-c} = f'(\beta).$$

Par stricte croissance de f', $f'(\alpha) < f'(\beta)$, donc

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(b)-f(c)}{b-c},$$

i.e.

$$\frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x)}{(1-\lambda)(y-x)} < \frac{f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)}{\lambda(y-x)},$$

donc

$$\frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x)}{1-\lambda} < \frac{f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)}{\lambda},$$

d'où l'inégalité désirée ! □

Remarque. Une fonction affine n'est pas strictement convexe : il faut visualiser ainsi la non stricte convexité.