Thèmes

1. Structures algébriques.

a) *Loi de composition interne (LCI)* : **(i)** Définitions : LCI associative, LCI commutativité, éléments commutants, élément neutre, élément symétrisable, élément simplifiable, LCI distributive par rapport à une autre. **(ii)** Composées « multinaires » : **itérés d'un élément**, composée d'une liste, composée commutative d'une famille finie, groupement par paquets. **(iii)** LCI par héritage : **partie stable et loi induite**, loi produit. **(iv)** Homomorphismes : homomorphisme et isomorphisme entre deux ensembles munis de LCI's, endomorphisme et automorphisme d'un ensemble muni d'une LCI, composée d'homomorphismes, homomorphisme et loi produit.

b) *Structure de groupe* : **(i)** Généralités : loi de groupe, propriétés des translations à gauche et des translations à droite. **(ii)** Groupe par héritage : sous-groupe, **caractérisation des sous-groupes**, intersection de sous–groupes, sous-groupe engendré par des éléments, **sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$**, sous-groupes multiplicatifs finis de $\mathbb{C}$ (*démonstration non exigible*), groupe produit (dont groupe « fonctionnel »). **(iii)** Homomorphismes de groupes : homomorphisme et isomorphisme entre deux groupes, endomorphisme et automorphisme d'un groupe, composée d'homomorphismes de groupes, homomorphisme de groupes et loi produit, **image réciproque et image directe** par un homomorphisme de groupes, noyau et image d'un homomorphisme de groupes, **ensemble des antécédents par un homomorphisme de groupes**, CNS d'injectivité d'un homomorphisme de groupes, cardinaux du noyau et de l'image d'un homomorphisme partant d'un groupe fini. **(iv)** Groupe symétrique d'un ensemble : isomorphisme des groupes symétriques de deux ensembles en bijection, **transpositions et produits de transpositions**, points fixes et support d'une permutation, commutativité de deux permutations à supports disjoints, orbites suivants une permutation, **cycles et produits de cycles à supports disjoints** (*démonstration non exigible*).

c) *Structure d'anneau* : **(i)** Généralités : opposée de tout élément, inverse de tout élément inversible, groupe des inversibles, sous-anneau, anneau produit (dont anneau « fonctionnel »), homomorphismes d'anneaux. **(ii)** Calculs dans un anneau quelconque : absorbance et règle des signes, itérés additifs d'un produit, double distributivité générale, formule de Bernoulli, formule du binôme de Newton. **(iii)** Anneaux commutatifs : anneau intègre, corps.

d) *Groupe symétrique et permutations de variables* : **(i)** n-ième groupe symétrique. **(ii)** Fonction numérique symétrique : Effet d'un échange de deux variables et effet de toute permutation des variables. **(iii)** Signature sur le groupe symétrique d'un ensemble fini X constitué d'au moins deux éléments : l'unique homomorphisme de $(\mathcal{S}_{\mathcal{X}}, \circ)$ dans $(\{-1\ ;\ +1\}, \times)$ par lequel toute transposition envoie à -1 (*démonstration non exigible*) ; expression en fonction du nombre d'orbites ; expression en fonction du nombre d'inversions (cas où X est $[\![1, n]\!]$) ; signature d'un cycle ; n-ième groupe alterné. **(iv)** Fonction numérique antisymétrique : effet d'un échange de variables et effet de toute permuation des variables : $f(x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n-1)}, x_{\sigma^{-1}(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$.

2. Dérivabilité (*questions de cours seulement*).

a) *Dérivabilité d'une fonction réelle* : **(i)** Définitions et premières propriétés : limite du taux de variation ; admission d'un développement limité à l'ordre un ; dérivée à droite et dérivée à gauche. **(ii)** Opérations sur les dérivées (en un point) : combinaison linéaire ; produit ; quotient ; composée ; réciproque. **(iii)** Dérivées d'ordre entier naturel (sur un intervalle) : exemple de fonction n-fois continûment dérivable mais non $(n+1)$-fois dérivable ; combinaisons linéaires, produits, quotients, composées, et réciproques de fonctions n-fois dérivables.

b) *Théorèmes liés à la dérivation* : **(i)** Dérivabilité et extremum local : extremum local et point critique ; condition nécessaire d'extremum local d'une fonction dérivable en un point intérieur. **(ii)** Dérivabilité et extremum local : extremum local et point critique ; condition nécessaire d'extremum local d'une fonction dérivable en un point intérieur. **(iii) Théorème de Rolle** : condition suffisante d'annulation de la dérivée entre deux points distincts. **(iv) Égalité/théorème des accroissements finis** : multiplicateur pour passer de l'accroissement de a à b à l'accroissement de $f(a)$ à $f(b)$. **(v)** Corollaires de l'égalité des accroissements finis : inégalité des accroissements finis et fonctions lipschitziennes ; signe de la fonction dérivée et sens de variations ; théorème de la limite de la dérivée ...

walter.ngambou@ac-versailles.fr

Exemples de questions de cours

1. Equivalence entre la dérivabilité en a et l'admission d'un développement limité à l'ordre 1 en a.

2. Dérivabilité d'une composée de deux fonctions réelles.

3. Dérivabilité de la réciproque d'une fonction réelle bijective.

4. $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ est un sous-anneau de $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \times)$.

5. Formule de Leibniz (*attention à ne pas écrire* $f^{(-1)}$).

6. Dérivées successives des fonctions puissances entières, exponentielles, logarithmes, cosinus et sinus.

7. Théorème de Rolle.

8. Egalité des accroissements finis.

9. Caractérisation des fonctions lipschitziennes parmi les fonctions dérivables ; exemples et contre-exemples.

 walter.ngambou@ac-versailles.fr