DM11
Pour le lundi 03/02

Problème 1 obligatoire. Problème 2 et 3 facultatifs. Préciser en début de copie les problèmes traités.
Le Problème 2 est un menu problème d'algèbre tandis que le Problème 3 est un gros problème d'analyse.

Problème 1. Méthode de Newton

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$. On suppose que

- $f(a) > 0$
- $f(b) < 0$
- $\forall x \in [a, b], f'(x) < 0$.
- $\forall x \in [a, b], f''(x) > 0$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a, b[$, que l'on notera c.

On définit maintenant, pour tout x de $[a, b]$, $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

2. Montrer que g est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$, et déterminer les variations de g.

3. Montrer qu'il existe trois réels m, m' et M strictement positifs tels que pour tout x de $[a, b]$, on ait
$$m \leqslant |f'(x)| \leqslant m' \text{ et } |f''(x)| \leqslant M.$$

4. En appliquant convenablement le théorème des accroissements finis, d'abord à g puis à f, montrer qu'il existe $\mu > 0$ tel que
$$\forall x \in [a, b],\ |g(x) - c| \leqslant \mu |x - c|^2.$$

5. On se propose donc de construire une suite approchant c. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n). \end{cases}$$

(a) Illustrer la construction de la suite, en plaçant sur un même graphe $\boxed{\text{la courbe de } f}$ et les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (attention, je parle bien de la courbe de f, **pas** de la courbe de g !)

(b) Montrer que u_n est croissante, majorée par c et qu'elle converge vers c.

6. Démontrer même qu'il existe $K > 0$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - c| \leqslant K \left(\frac{|u_0 - c|}{K} \right)^{2^n}.$$

Quelle information supplémentaire cela donne-t-il quant à la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers c ?

Problème 2. Puissances d'un k-cycle

1. Dans $\mathcal{S}_5$, donner la décomposition en cycles à supports disjoints de ρ, ρ^2, ρ^3, lorsque $\rho = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, puis lorsque $\rho = (1\ 2\ 3\ 4)$.

On va en fait démontrer un résultat plus général : si σ est un k-cycle (avec $k \in [\![2, n]\!]$), si $d \in [\![1, n]\!]$, alors pour tout $d \geqslant 1$, σ^d se décompose en $k \wedge d$ cycles à supports disjoints, de longueur $\dfrac{k}{k \wedge d}$.

Dans un premier temps, **on suppose** $k = n$. Soit σ est un n-cycle, et $d \in [\![1, n]\!]$. Notons $\rho = \sigma^d$.

2. Démontrer que pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $\{k \in \mathbb{Z},\ \sigma^k(i) = i\} = n\mathbb{Z}$.

3. En déduire que pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $\{k \in \mathbb{Z},\ \rho^k(i) = i\} = \left(\dfrac{n}{n \wedge d}\right)\mathbb{Z}$.

4. En déduire que σ^d se décompose en $n \wedge d$ cycles à supports disjoints, de longueur $\dfrac{n}{n \wedge d}$.

5. Peut-on généraliser à σ un k-cycle quelconque (avec k différent de n) ?

Problème 3. Fonctions absolument monotones

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$ et f une fonction de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, b[$.

f est dite absolument monotone (en abrégé AM) si : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]a, b\Big[, f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

f est dite complètement monotone (en abrégé CM) si : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]a, b\Big[, (-1)^n f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

Partie I. Premières questions

1. Soient f et g deux fonctions AM définies sur $]a, b[$. Montrer que $f + g$ et $f \times g$ sont AM. Qu'en est-il si f et g sont des fonctions CM ?

2. Soient $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ et $g :]-b, -a[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(-x)$. Montrer que f est AM sur $]a, b[$ si et seulement si g est CM sur $]-b, -a[$.

Étudions maintenant quelques exemples.

3. Vérifier que la fonction $-\ln$ est CM sur $]0, 1[$.

4. Démontrer que la fonction tan est AM sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

5. On suppose dans cette question que $a \in \mathbb{R} (a \neq -\infty)$ et f est AM sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$tel que $\ell = \lim\limits_{a^+} f$.

6. On prolonge f en posant $f(a) = \ell$. Montrer que f est dérivable à droite en a, et que f' est continue à droite en a.

7. Plus généralement, montrer que f est infiniment dérivable à droite en a avec des dérivées positives ou nulles.

8. Montrer qu'il ne se passe pas la même chose en b.

Partie II. Formule de Taylor

On suppose ici que $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a = 0$. Soit f absolument monotone sur $]0, b[$.

On pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$ et $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$

9. Démontrer que $R_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \dfrac{x^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)du$.

10. Démontrer que la fonction $x \to \dfrac{R_n(x)}{x^n}$ est croissante sur $]0, b[$.

11. Démontrer que $\forall x \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) \leqslant f(x)$, puis que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note $g(x)$ sa limite.

12. Démontrer que $f(x) = g(x)$.