 walter.ngambou@ac-versailles.fr

TD 12 bis
Convexité

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. *Quelques inégalités de convexité.* ●◐○

1. Inégalité harmonico-arithmetico-géométrique : Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leqslant (x_1\cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}.$$

2. Montrer que $x \in \mathbb{R} \longmapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$, et en déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x_1, \dots, x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$:

$$1+\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (1+x_k)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$,

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (a_k+b_k)\right)^{\frac{1}{n}}$$

.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. Démontrer que f est constante.

Exercice 3. *Comportement asymptotique des fonctions convexes.* ●●○ Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ possède une limite $a \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.

2. Si $a \in \mathbb{R}$, démontrer que $x \mapsto f(x) - ax$ possède une limite $b \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.

3. Si $b \in \mathbb{R}$, étudier la position de la courbe et de son asymptote.

Exercice 4. *Inégalités de Hölder et de Minkowski.* Soit $p > 1$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on appelle norme p de X le réel positif $\|X\|_p = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Soient $p, q > 1$ deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$.

1. Démontrer que pour tous réels x et y, $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}$.

2. (inégalité de Hölder) En déduire que pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|X\|_p = \|Y\|_q = 1$, $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leqslant 1$, puis que pour tous X et Y dans $\mathbb{R}^n$,

$$\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leqslant \|X\|_p \|Y\|_q.$$

3. (inégalité de Minkowski) Démontrer que pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$: $\quad \|X+Y\|_p \leqslant \|X\|_p + \|Y\|_p$.

Stratégie :

- Il faut pouvoir reconnaître la convexité dans des inégalités : exercices 7, 8, 9.
- Il faut pouvoir relier convexité et comportement global : exercice 5, 6, 12,
- Faites un exercice un peu plus raffiné au moins : exercice 14 ou 15.

2 Exercices à faire en TD

Plus que jamais, les indications de fin de TD peuvent être utiles, afin de vous guider sur la question « à quelle fonction appliquer une inégalité de convexité ? »

Exercice 5. ●○○ Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe positive pour laquelle $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.

Exercice 6. ●○○ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, concave. Démontrer que s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et $f(a) > f(b)$, alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Exercice 7. ◐○○ Démontrer que :

$$\forall x, y \in]1, +\infty[, \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$$

Exercice 8. *Une application de l'inégalité arithmético-géométrico-harmonique*. ●○○ Soient $x_1 \dots x_n$ des réels > 0. Montrer, en utilisant l'inégalité arithmético-géométrico-harmonique, que

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n.$$

Exercice 9. ●◐○ Montrer que pour tous $a, b, x, y > 0$:

$$(x+y)\ln\frac{x+y}{a+b} \leqslant x\ln\frac{x}{a} + y\ln\frac{y}{b}.$$

Exercice 10. ●◐○ Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_i}$$

En déduire que $\forall x > 1$,

$$\sqrt{x^{2n}-1} \geqslant \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\frac{x^n-1}{\sqrt{n}}$$

Exercice 11. ●○○ Encadrer la fonction cos sur $[\pi/2, \pi]$ par deux **bonnes** fonctions affines nulles en $\pi/2$, de la manière la plus optimale possible.

Exercice 12. ●●○ Soit f et g deux fonctions convexes définies sur un intervalle I. Montrer que si $f + g$ est affine, alors f et g sont toutes les deux affines.

Exercice 13. ●●○ Soit I un intervalle ouvert et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que f est lipschitzienne sur tout segment inclus dans I.

Exercice 14. *Limite de $f(x) - xf'(x)$*. ●●◐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, convexe, dérivable, et $g : x \mapsto f(x) - xf'(x)$.
Indication. L'exercice est beaucoup plus simple si f est 2 fois dérivable... vous pouvez commencer avec cette hypothèse.

1. Montrer que g admet une limite (éventuellement infinie) en $+\infty$.

On se place dans le cas où g admet une limite finie p

2. Démontrer que $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{f(x)-p}{x}$ admettent des limites en $+\infty$, puis en déduire que $\dfrac{f(x)}{x}$ et $f'(x)$ admettent une même limite finie m en $+\infty$.

3. Montrer alors que $f(x) - mx - p \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 15. ●●○ On dit que $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}_+^*$ est *logarithmiquement convexe* sur l'intervalle I si $\ln f$ est convexe sur I.

1. Soit f définie par $f(x) = e^{2x-\cos x}$, montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que si f est logarithmiquement convexe, alors f est convexe. Réciproque ?

3. Montrer que f est logarithmiquement convexe si, et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, f^α est convexe.

4. Montrer que f est logarithmiquement convexe si, et seulement si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^{ax}f(x)$ est convexe.

5. Montrer que le produit et la somme de deux fonctions logarithmiquement convexes l'est aussi.

Exercice 16. ●●◐ Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ positive, bornée, de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f \leqslant f''$.

1. Montrer que f est convexe et décroissante.

2. Montrer que f' tend vers 0 en $+\infty$.

3. Soit g et h définies par $g(x) = f(x)e^x$ et $h(x) = (f'(x) + f(x))\, e^{-x}$ pour $x \geqslant 0$. Étudier le signe de h, et les variations de g.

4. En déduire que pour $x \geqslant 0$, on a $f(x) \leqslant f(0)e^{-x}$.

Exercice 17. ●●◐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe.

Indications.

1. Dans la première question, tout vient de la concavité de ln et de l'inégalité de Jensen.

2. Utiliser l'inégalité des pentes pour montrer que f tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ en $+\infty$ ou $-\infty$.

5. Utiliser l'inégalité des pentes, ainsi que la positivité de f.

6. Utiliser, encore, l'inégalité des pentes. (oui, elle est **très importante**, cette inégalité !)

7. Utiliser, en la démontrant, la concavité de $x \mapsto \ln(\ln(x))$

8. Poser, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, $a_i = \dfrac{x_i}{x_{i+1}}$, et $a_n = \dfrac{x_n}{x_1}$.

9. Utiliser la concavité du ln (peut-être la convexité de $-\ln$ d'ailleurs... !), toujours, mais pas directement avec x et y : c'est ça la subtilité !

10. Utiliser la concavité de $x \mapsto \sqrt{x}$ puis l'inégalité de Jensen. Ensuite, factoriser $x^{2n} - 1 = (x^2-1) \times \ldots$.

11. Calquer sur l'exercice de cours avec le sinus.

12. Raisonner par l'absurde : quelle inégalité stricte vérifie une fonction convexe non affine ?

13. Utiliser l'inégalité des pentes, en pensant au fait que si $[a, b] \subset \mathrm{I}$, il existe $c \in \mathrm{I},\ c > b$.

14.
1. Démontrer que g est décroissante (attention, f n'est pas deux fois dérivable donc on ne peut pas dériver g !) Revenir donc à la définition de la décroissance et utiliser la croissance des pentes.
2. Démontrer que $h : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite et qu'elle est bornée, puis remarquer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x} + \dfrac{f'(x)}{x}$.
3. Démontrer que $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - p}{x}$ décroît en tendant vers m, puis utiliser que f' croît en tendant vers m pour conclure par théorème d'encadrement.

15.
1. Dériver simplement deux fois !
2. Remarquer que l'on peut composer une inégalité de convexité par une fonction convexe croissante ! (l'exponentielle, à tout hasard...) Pour la réciproque, cf. la question précédente.
3. Pour le sens direct, faire comme la question précédente. Pour le sens réciproque, pour x fixé, quelle est la dérivée de $\alpha \mapsto f(x)^\alpha$? Cela devrait pouvoir aider à prendre une limite d'un taux d'accroissement pour démontrer la log-convexité !
4. Un sens est évident. Pour l'autre, vraiment plus dur, Montrer que si toutes les fonctions f_c sont convexes, alors pour tous $x, y \in I$ avec $x \neq y$, et $\lambda \in]0, 1[$. $\forall c \in \mathbb{R} : f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)e^{c\lambda(x-y)}f(x) + \lambda e^{c(1-\lambda)(y-x)}f(y)$. Considérer ensuite la valeur de c pour laquelle $\varphi(c) = (1-\lambda)e^{c\lambda(x-y)}f(x) + \lambda e^{c(1-\lambda)(y-x)}f(y)$ est minimal, et vérifier que pour cette valeur de c, on a $\varphi(c) = f(x)^{1-\lambda}f(y)^\lambda$. Conclure !
5. Utiliser l'une des deux caractérisations précédentes !

16.
1. Supposer qu'il existe $a < b$ tels que $f(a) < f(b)$ et utiliser l'inégalité des pentes !
2. Raisonner par l'absurde en remarquant que f' a nécessairement une limite dans $\mathbb{R}_- \cup \{-\infty\}$, puis remarquer, par exemple, que $f(x) - f(x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f'(t)dt$.
3. C'est juste du calcul, ainsi qu'une inégalité entre une fonction monotone et sa limite.
4. Déduction directe.

17. Exercice difficile ! Remarquer que l'ensemble des dyadiques, $\left\{\dfrac{a}{2^b},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et prouver l'inégalité de convexité uniquement pour des λ dyadiques ! Il faut pour cela faire une récurrence sur la puissance de 2 au dénominateur.