 walter.ngambou@ac-versailles.fr

TD 12 bis
Convexité

(avec corrigé)

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. *Quelques inégalités de convexité.* ●◐○

1. Inégalité harmonico-arithmetico-géométrique : Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que
$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqslant (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

2. Montrer que $x \in \mathbb{R} \longmapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$, et en déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x_1, \dots, x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$:
$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k)\right)^{\frac{1}{n}}.$$
En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$,
$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_k)\right)^{\frac{1}{n}}$$
.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. Démontrer que f est constante.

Exercice 3. *Comportement asymptotique des fonctions convexes.* ●●○ Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ possède une limite $a \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.

2. Si $a \in \mathbb{R}$, démontrer que $x \mapsto f(x) - ax$ possède une limite $b \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.

3. Si $b \in \mathbb{R}$, étudier la position de la courbe et de son asymptote.

Exercice 4. *Inégalités de Hölder et de Minkowski.* Soit $p > 1$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on appelle norme p de X le réel positif $\|X\|_p = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Soient $p, q > 1$ deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Démontrer que pour tous réels x et y, $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.

2. (inégalité de Hölder) En déduire que pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|X\|_p = \|Y\|_q = 1$, $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant 1$, puis que pour tous X et Y dans $\mathbb{R}^n$,
$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \|X\|_p \|Y\|_q.$$

3. (inégalité de Minkowski) Démontrer que pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$: $\|X + Y\|_p \leqslant \|X\|_p + \|Y\|_p$.

Stratégie :

- Il faut pouvoir reconnaître la convexité dans des inégalités : exercices 7, 8, 9.
- Il faut pouvoir relier convexité et comportement global : exercice 5, 6, 12,
- Faites un exercice un peu plus raffiné au moins : exercice 14 ou 15.

2 Exercices à faire en TD

Plus que jamais, les indications de fin de TD peuvent être utiles, afin de vous guider sur la question « à quelle fonction appliquer une inégalité de convexité ? »

Exercice 5. ●○○ Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe positive pour laquelle $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.

Exercice 6. ●○○ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, concave. Démontrer que s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et $f(a) > f(b)$, alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Supposons que cela soit le cas. Alors

$$\tau \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0.$$

Soit $x \geqslant b$. Par l'inégalité des pentes (attention, la fonction est convexe !),

$$\tau \geqslant \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

donc

$$f(x) \leqslant (x - a)\tau + f(a) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty,$$

d'où le résultat !

Exercice 7. ◐○○ Démontrer que :

$$\forall x, y \in]1, +\infty[, \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$$

Soit, pour $x \in]1, +\infty[$, $f(x) = \ln(In(x))$. Alors $f' : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$, clairement décroissante. Donc f est concave. Donc pour tous x et y dans $]1, +\infty[$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{f(x) + f(y)}{2},$$

i.e.

$$\ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \geqslant \frac{\ln(\ln(x)) + \ln(\ln(y))}{2} = \ln\left(\sqrt{\ln(x)\ln(y)}\right),$$

d'où le résultat désiré en prenant l'exponentielle !

 N.Laillet - W.Ngambou
walter.ngambou@ac-versailles.fr

Exercice 8. *Une application de l'inégalité arithmético-géométrico-harmonique*. ●○○ Soient $x_1 \dots x_n$ des réels > 0. Montrer, en utilisant l'inégalité arithmético-géométrico-harmonique, que

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n.$$

Là, la convexité ne saute pas aux yeux ! On remarque tout de même que, si l'on pose $a_i = \dfrac{x_{i+1}}{x_i}$ (pour $i \in [\![1, n-1]\!]$), et $a_n = \dfrac{x_1}{x_n}$, alors

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}.$$

Or, par l'inégalité arithmético-géométrico-harmonique,

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = 1,$$

d'où l'inégalité désirée !

Exercice 9. ●◐○ Montrer que pour tous $a, b, x, y > 0$:

$$(x+y)\ln\frac{x+y}{a+b} \leqslant x \ln\frac{x}{a} + y \ln\frac{y}{b}.$$

Remarquons que l'inégalité se réécrit

$$\ln\frac{x+y}{a+b} \leqslant \frac{x}{x+y}\ln\frac{x}{a} + \frac{y}{x+y}\ln\frac{y}{b}.$$

Et, comme on remarque que $\dfrac{x}{x+y} + \dfrac{y}{x+y} = 1$, on peut se demander si ce qui est à gauche est combinaison convexe de ce qui est dans le ln à droite.

Pas de chance, $\dfrac{x+y}{a+b} \neq \dfrac{x}{x+y}\dfrac{x}{a} - \dfrac{x}{x+y}\dfrac{y}{b}$. EN REVANCHE,

$$\frac{a+b}{x+y} = \frac{x}{x+y}\frac{a}{x} + \frac{y}{x+y}\frac{b}{y}.$$

Ainsi, par concavité de ln,

$$\ln\frac{a+b}{x+y} \geqslant \frac{x}{x+y}\ln\frac{a}{x} + \frac{y}{x+y}\ln\frac{b}{y},$$

d'où l'inégalité désirée en prenant l'opposé !

Exercice 10. ●◐○ Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_i}$$

En déduire que $\forall x > 1$,

$$\sqrt{x^{2n}-1} \geqslant \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \frac{x^n - 1}{\sqrt{n}}$$

On remarque que $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave. Ainsi, par l'inégalité de Jensen,

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_i} \geqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_i},$$

ce qui permet d'avoir exactement l'inégalité désirée.
Ensuite,

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k}.$$

Ainsi, par l'inégalité précédente,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^{2n}-1} &= \sqrt{x^2-1}\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} x^{2k}} \\ &\geqslant \sqrt{x^2-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{x^{2k}} \\ &\geqslant \sqrt{x^2-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{x^n-1}{x-1} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\frac{x^n-1}{\sqrt{n}},\end{aligned}$$

d'où le résultat désiré !

Exercice 11. ●○○ Encadrer la fonction cos sur $[\pi/2, \pi]$ par deux **bonnes** fonctions affines nulles en $\pi/2$, de la manière la plus optimale possible.

Là, on fait vraiment comme en cours ! La fonction cos est convexe sur $[\pi/2, \pi]$ donc

- elle est sous la corde reliant les points $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ et $(\pi, -1)$, i.e. la droite d'équation $y = \frac{\cos(pi) - \cos(\pi/2)}{pi - \frac{\pi}{2}}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, donc

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right],\ \cos(x) \leqslant -\frac{2}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

- elle est au-dessus de sa tangente en $\frac{\pi}{2}$, donc

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right],\ \cos(x) \geqslant \frac{\pi}{2} - x.$$

D'où
$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \ \frac{\pi}{2} - x \leqslant \cos(x) \leqslant -\frac{2}{\pi}x + 1.$$

Exercice 12. ●●○ Soit f et g deux fonctions convexes définies sur un intervalle I. Montrer que si $f + g$ est affine, alors f et g sont toutes les deux affines.

Exercice 13. ●●○ Soit I un intervalle ouvert et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que f est lipschitzienne sur tout segment inclus dans I.

Exercice 14. *Limite de $f(x) - xf'(x)$.* ●●◐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, convexe, dérivable, et $g : x \mapsto f(x) - xf'(x)$.
Indication. L'exercice est beaucoup plus simple si f est 2 fois dérivable... vous pouvez commencer avec cette hypothèse.

1. Montrer que g admet une limite (éventuellement infinie) en $+\infty$.

Si f est deux fois dérivable, c'est évident : on montre que g est décroissante.
Sinon, on prend $0 \leqslant x < y$, et on montre que
$$g(y) - g(x) = (y - x)\left(\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f'(y)\right) + x(f'(x) - f'(y)),$$
mais si $x < y$, par croissance des pentes et passage à la limite, on en déduit que
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant f'(y),$$
donc, par croissance de f', on obtient $g(y) - g(x) \leqslant 0$, donc g décroît, donc admet une limite en $+\infty$.

On se place dans le cas où g admet une limite finie p

2. Démontrer que $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{f(x) - p}{x}$ admettent des limites en $+\infty$, puis en déduire que $\dfrac{f(x)}{x}$ et $f'(x)$ admettent une même limite finie m en $+\infty$.

Posons $\quad \forall x > 0 \quad \varphi(x) = \dfrac{f(x) - p}{x} \quad$ et $\quad \psi(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ Par dérivation, on a
$$\forall x > 0 \quad \varphi'(x) - \frac{1}{x^2}\left[f(x) - xf'(x) - p\right] = -\frac{g(x) - p}{x^2}$$
et
$$\forall x > 0 \quad \psi'(x) = -\frac{1}{x^2}\left[f(x) - xf'(x) - f(0)\right] = -\frac{g(x) - f(0)}{x^2}$$
La fonction g étant décroissante, on a $p \leqslant g(x) \leqslant g(0)$ pour tout $x \geqslant 0$ on en déduit
$$\forall x > 0 \quad \varphi'(x) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \psi'(x) \geqslant 0$$

N.Laillet - W.Ngambou
walter.ngambou@ac-versailles.fr

et on a également
$$\forall x > 0 \quad \psi(x) \leqslant \varphi(x)$$
Ainsi
$$\forall x \geqslant 1 \quad \psi(1) \leqslant \psi(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(1)$$
Par limite monotone, les fonctions φ et ψ admettent donc des limites finies en $+\infty$. Enfin, on a
$$\forall x > 0 \quad \varphi(x) - \psi(x) = \frac{f(0) - p}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
On en déduit que les fonctions φ et ψ admettent une même limite finie m en $+\infty$. Ainsi, on obtient pour $x > 0$
$$\frac{f(x)}{x} = \varphi(x) + \frac{p}{x} \underset{x\to+\infty}{=} m + o(1) \quad \text{et} \quad f'(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{g(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{=} m + o(1) + \frac{p+o(1)}{x}$$
On conclut Les fonctions $\dfrac{f(x)}{x}$ et $f'(x)$ admettent une même limite finie m pour $x \to +\infty$.

---

3. Montrer alors que $f(x) - mx - p \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On pose $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - p}{x}$ pour $x > 0$. Par dérivation, on a
$$\forall x > 0,\ \varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}(f(x) - xf'(x) - p) \leqslant 0.$$
Ainsi, φ décroît et $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} m$ d'où $\varphi(x) \geqslant m$ pour tout $x > 0$ et ainsi $\forall x > 0$, $f(x) - mx \geqslant p$.
Comme f' croît en tendant vers m en $+\infty$, on obtient
$$\forall x > 0,\ p \leqslant f(x) - mx \leqslant f(x) - xf'(x),$$
donc, par encadrement, $f(x) - mx - p \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 15. ●●○ On dit que $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}_+^*$ est *logarithmiquement convexe* sur l'intervalle I si $\ln f$ est convexe sur I.

1. Soit f définie par $f(x) = e^{2x-\cos x}$, montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si f est logarithmiquement convexe, alors f est convexe. Réciproque ?
3. Montrer que f est logarithmiquement convexe si, et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, f^α est convexe.
4. Montrer que f est logarithmiquement convexe si, et seulement si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^{ax}f(x)$ est convexe.
5. Montrer que le produit et la somme de deux fonctions logarithmiquement convexes l'est aussi.

Exercice 16. ●●◐ Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ positive, bornée, de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f \leqslant f''$.

1. Montrer que f est convexe et décroissante.

Comme f est positive, f'' est positive, donc f est convexe. De plus, s'il existait $x < y$ tels que $f(x) < f(y)$, on aurait, par inégalité des pentes, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc f ne serait pas bornée. Donc f est décroissante

2. Montrer que f' tend vers 0 en $+\infty$.

Comme f' est décroissante, elle admet une limite en $+\infty$, dans $\mathbb{R}_- \cup \{-\infty\}$. Si cette limite est réelle non nulle, disons $\alpha < 0$, $f'(x) < \alpha/2$ pour x assez grand (disons $x \geqslant x_0$. Ainsi, $f(x) - f(x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f'(t)dt \leqslant (x - x_0)\frac{\alpha}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, ce qui contredit le caractère positif de f. Si $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, c'est la même chose ! Donc $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Soit g et h définies par $g(x) = f(x)e^x$ et $h(x) = (f'(x) + f(x))\, e^{-x}$ pour $x \geqslant 0$. Étudier le signe de h, et les variations de g.

On remarque que $g'(x) = (f(x) + f'(x))e^x$ et que $h'(x) = (f''(x) - f(x))e^{-x} \leqslant 0$, donc h croît. Comme f' est bornée (elle tend vers 0), et f est bornée, on en déduit que $h(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc h est négative sur $\mathbb{R}_+$. Ceci nous permet d'affirmer que $f + f'$ est toujours négative, donc g décroît.

4. En déduire que pour $x \geqslant 0$, on a $f(x) \leqslant f(0)e^{-x}$.

On en déduit que $g(x) \leqslant g(0)$ pour tout $x \geqslant 0$, donc que $f(x)e^x \leqslant f(0)$, ce qui est le résultat désiré !

Exercice 17. ●●◐ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe.

Remarque. On sait (cf. TD sur les suites) que l'ensemble des dyadiques :

$$Dy = \left\{\frac{a}{2^b},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}\right\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$. On va donc démontrer que si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

pour tout $\lambda \in [0,1] \cap Dy$.
On montre par récurrence sur $n \geqslant 1$ que,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall p \in \{0,1,\dots,2^n\}\ f\left(\frac{p}{2^n}x + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)y\right) \leqslant \frac{p}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)f(y). \qquad (\mathcal{P}_n)$$

L'initialisation est claire.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$. Soit $p \in \left\{0,1,\dots,2^{n+1}\right\}$. Quitte à inverser x et y, on peut supposer que $p \leqslant 2^n$.
On utilise alors l'hypothèse de base en séparant en 2 notre expression.

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{p}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{p}{2^{n+1}}\right)y\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2^n}x + \frac{(2^n - p)}{2^n}y\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2^n y}{2^n}\right)\right)\\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{p}{2^n}x + \frac{(2^n - p)}{2^n}y\right) + f(y)\right)\\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2^n}f(x) + \frac{2^n - p}{2^n}f(y) + f(y)\right)\\
&\leqslant \frac{p}{2^{n+1}}f(x) + \left(\frac{2^n - p}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}\right)f(y)\\
&\leqslant \frac{p}{2^{n+1}}f(x) + \frac{2^{n+1} - p}{2^{n+1}}f(y)
\end{aligned}$$

Ceci prouve l'hérédité et le résultat !